

# 平带光子微结构中的新颖现象：从模式局域到实空间拓扑\*

夏世强<sup>1)2)†</sup> 唐莉勤<sup>1)3)‡</sup> 夏士齐<sup>1)</sup> 马继娜<sup>1)</sup> 燕文超<sup>1)</sup> 宋道红<sup>1)3)§</sup> 胡  
毅<sup>1)</sup> 许京军<sup>1)3)‡</sup> 陈志刚<sup>1)3)§</sup>

1) (南开大学物理学院泰达应用物理研究院, 天津 300457)

2) (河南师范大学物理学院, 新乡 453007)

3) (山西大学极端光学协同创新中心, 太原 030006)

## 摘要

近年来, 凝聚态物理中平带局域与拓扑等概念与光学体系的有机结合, 使得平带光子学系统的研究迎来了极为快速的发展, 催生了一系列新颖的光物理现象与潜在的应用前景. 目前, 平带结构在光子晶体、光学超构材料以及光子晶格(倏逝波耦合的光学波导阵列)等多种人工光子微结构中得到了实现, 并在其中观察到了很多凝聚态系统中难以直接实现的物理现象. 本文简要综述光子微结构中关于平带物理的最新研究进展. 以光诱导和激光直写光子晶格系统为例, 包括 Lieb、Kagome 和超级蜂窝晶格等, 特别介绍平带模式局域与实空间拓扑效应等新颖物理现象. 光子微结构为研究平带物理和拓扑效应提供了一个可调控的平台, 同时其研究结果也对探究电子、声子、等离激元、腔极化子与超冷原子等系统中相关的基本物理问题和应用具有借鉴作用.

**关键词:** 光子微结构, 平带, 局域模, 实空间拓扑, 不可压缩环形态

PACS: 42.82.Et, 03.65.Ge, 63.20.Pw, 02.40.-k

**基金:** 国家重点研发计划(批准号: 2017YFA0303800)、国家自然科学基金(批准号: 91750204, 11922408, 11704102, 11674180)和111计划(批准号: B07013)资助的课题.

# 共同第一作者

† 通讯作者.E-mail: [songdaohong@nankai.edu.cn](mailto:songdaohong@nankai.edu.cn);

‡ 通讯作者.E-mail: [jjxu@nankai.edu.cn](mailto:jjxu@nankai.edu.cn);

§ 通讯作者.E-mail: [zgchen@nankai.edu.cn](mailto:zgchen@nankai.edu.cn);

## 1 引言

众所周知, 电子在周期晶格中的运动可由布洛赫(Bloch)理论描述, 其能带结构通常由色散曲线组成, 对应的本征模式为延展的布洛赫波. 然而, 过去的一系列研究发现, 一些特殊的晶格结构具有“几何阻挫”(geometrical frustration)现

象，往往存在一些完全平坦的能带，称之为平带 (flatband)---在整个布里渊区完全无色散的能带<sup>[1-8]</sup>. 由于波函数能量  $E(\mathbf{k})$  不随着动量  $\mathbf{k}$  变化，波的横向传播被限制，呈现新颖的局域态. 在凝聚态系统中，具有自旋轨道耦合的平带电子态同时具有强关联特性和非平庸拓扑性质，这为研究无磁场时复杂的多体态以及强关联多体物理提供了理想的平台<sup>[9-12]</sup>. 典型的例子是分数量子霍尔效应。为了实现拓扑非平庸的平带结构，研究者提出了一系列的拓扑平带格点模型，通过调节自旋轨道耦合强度或交错磁通等，使能带接近于平带，从而能够实现无朗道能级的分数量子霍尔效应<sup>[13-16]</sup>. 此外，平带结构也为实现新颖的拓扑超导体提供了一种新的途径<sup>[17-21]</sup>.

另一方面，包括光子晶体、超构材料以及光子晶格（倏逝波耦合的光学波导阵列）等在内的人工光子微结构为模拟和探究凝聚态物理、材料科学、量子力学和光子学交叉领域的重要前沿物理问题提供了一个可调控的实验平台. 其中光子晶格更是成为光学系统类比研究其它物理问题的特例. 利用光子晶格平台，可以精确控制实验系统初始条件，同时可以操控入射波函数（包括振幅与相位等），这些为用经典光波传输类比实现凝聚态系统中电子的新奇现象提供了可能. 例如，在过去二十年，很多有趣的现象就是在光子晶格体系得到了实现，包括空间光孤子<sup>[22-24]</sup>、动态光局域<sup>[25,26]</sup>以及无序晶格中的安德森局域<sup>[27,28]</sup>等.

伴随着凝聚态系统中平带物理的蓬勃发展，平带在光子微结构中的研究也得到突破性的进展，一系列新颖的现象得到了理论预言与实验证实. 本综述中，首先回顾平带光子微结构的最新研究进展，并聚焦讨论光诱导光子晶格中新颖的平带光局域与实空间拓扑 (real-space topology) 现象. 第二部分，介绍几种典型的平带结构、平带理论以及相关的研究进展，这些平带晶格是目前研究的热点. 第三部分，总结光诱导/光直写方式制备平带光子晶格的两种方法. 随后，第四部分具

体介绍在光诱导 Lieb、Kagome 以及菱形光子晶格中常规的紧凑平带局域态 (compact localized states, CLSs) 的实验研究。在第五部分，总结在 Lieb 与超级蜂窝光子晶格中非常规平带线形态 (unconventional line states) 实验研究。这些新的平带模式由系统的实空间拓扑特性引起，且无法通过常规紧凑平带局域态的叠加得到。新的线形模式可以看作是不可压缩环形态 (noncontractible loop states, NLS) 在有限的平带晶格中的展现。进一步，第六部分讨论在 Kagome 光子晶格中两种实现不可压缩环形态的方法：一种是在有限晶格中观察环绕整个晶格的稳定边界模 (robust boundary modes, RMB)，可看作是不可压缩环形态的间接实现；另一种是在特殊设计的 Corbino 型 Kagome 晶格中实现对不可压缩环形态的直接观察，使得二维无限 Kagome 晶格或是能满足周期边界条件的三维圆环面 (torus) 上的环形态在一个维度上等效实现，讨论其形成机制和实空间拓扑特性。最后第七部分是总结和展望。

## 2 平带晶格结构及其模式局域研究概况

对平带的研究可以追溯到三十多年前。1986 年，Sutherland 等人在骰子 (dice)型结构中首次理论预言了由局部拓扑引起的平带电子局域化<sup>[29]</sup>。Fujiwara 等人在二维 Penrose 结构中也同样得到这种特殊局域本征模式<sup>[30]</sup>。1989 年，受到广泛关注的典型平带结构 Lieb 晶格被提出<sup>[31]</sup>。随后，Mielke<sup>[32-34]</sup>与 Tasaki<sup>[35,36]</sup>等人在对 Hubbard 模型的铁磁性研究中给出了一系列具有平带的结构，这些系统中均存在高简并度的基态电子。1996 年，Aoki 等人首次提出将平带本征模式命名为紧凑局域态并沿用至今<sup>[37]</sup>。早期关于平带及其相关物理现象的研究多为基于凝聚态系统的理论研究，而近十年，随着实验技术的发展，平带结构已经在电子、冷原子以及光学系统中相继被实现，相关的一系列有趣的物理现象也先后被报道<sup>[38-41]</sup>。另外，与常规延展的布洛赫波不同，平带的本征模式是局域的。因此，平带系统

中，在没有缺陷<sup>[42]</sup>、无序<sup>[23]</sup>以及非线性效应<sup>[22]</sup>等条件下也可以实现局域态，这为实现波函数局域提供了新的途径。

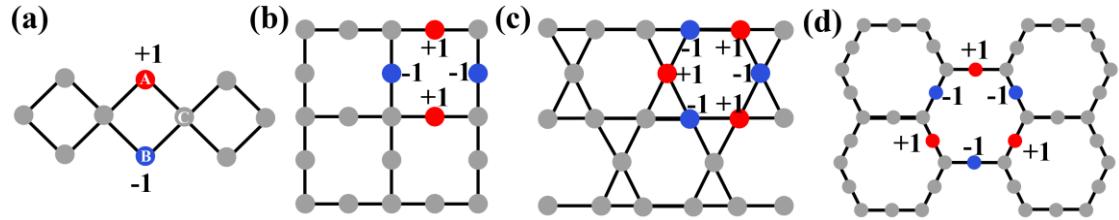


图 1 几种典型的平带晶格结构 (a) 菱形晶格; (b) Lieb 晶格; (c) Kagome 晶格; (d) 超级蜂窝型晶格。彩色点为常规紧凑排列的局域本征模式示意图，灰色点振幅为 0，红色点代表振幅为 1，蓝色点为 -1，即两者振幅大小相同而相位差为  $\pi$

Fig. 1. Typical examples of flatband lattices: (a) Quasi-one-dimensional (1D) rhombic lattice; (b) Lieb lattice; (c) Kagome lattice; (d) super-honeycomb lattice (sHCL). CLSs are depicted as colored sites, where zero amplitudes are denoted by gray color, and those with non-zero amplitudes of opposite phase are denoted by red and blue colors.

在多种形式的几何“阻挫”结构中都可能存在平带，本文着重介绍几种典型平带晶格结构，包括准一维菱形晶格、二维 Lieb 晶格、Kagome 晶格以及超级蜂窝型晶格。紧束缚近似下，只考虑最近邻格点之间的耦合时，这些结构的能带（见下文）中均包含狄拉克锥形能带以及至少一个完全无色散的平带。平带意味着系统群速度为零或者粒子有效质量无穷大，其宏观简并特性使得利用布洛赫波的叠加能够构建局域化的平带模式---紧凑局域模式，这些局域模式在实空间中能量束缚在有限的格点上<sup>[6]</sup>。如图 1 所示，一维菱形晶格的平带模式占据 A 与 B 两个格点，振幅大小相同，相位相反；对于 Lieb 结构，其平带模式则占据四个格点，所有格点振幅相同，相邻格点相位相反；而对于 Kagome 与超级蜂窝型晶格，平带局域模式均占据六个格点，仍然为振幅相同的反相位结构。由于特殊的几何排列，这些模式的能量在向近邻格点耦合时，波函数之间相干相消而保持局域。比如，一维菱形结构中，紧凑局域模式在传播过程中能量由 A 与 B 两个格点向近邻的 C 点耦合时，由于相干相消导致 C 点能量始终为 0，因此该模式能量始终局域在 A 与 B 格点上。

不同晶格结构的平带性质不同. Flach 等人根据紧凑局域模式所占据的晶格原胞数  $U$  对平带模式进行区分<sup>[43]</sup>. 例如, 菱形结构的平带局域本征模式只占据一个原胞, 因而  $U=1$ . 对于 Lieb 等结构则  $U\geq 2$ , 其局域模式更加复杂. 根据平带本征模式性质可以将平带分为三类: “对称保护” (symmetry-protected) 平带、“偶然” (accidental) 平带与“拓扑保护” (topologically protected) 平带. 菱形晶格中, 所有紧凑局域态 ( $U=1$ ) 构成平带模式完备正交基, 这样的平带属于“对称保护”平带. “偶然”平带可以看成通过调整系统参数形成的占据超过两个原胞 ( $U\geq 2$ ) 的本征模式构成. 这种平带系统中能带并不总是平坦的, 只是“偶然”出现于特殊参数条件下, 例如出现在 Mielke 等人提出的一系列一维线状排列结构<sup>[32]</sup>以及 Tasaki 等人提出的具有次近邻耦合时的结构<sup>[35]</sup>. 而“拓扑保护”平带是稳固的平带, 完全由晶格的拓扑结构决定, 比如具有二分 (bipartite) 结构的 Lieb 晶格的平带, 即使在一些特殊微扰下带隙打开, 但平带仍然能够很好的保持<sup>[31,44]</sup>.

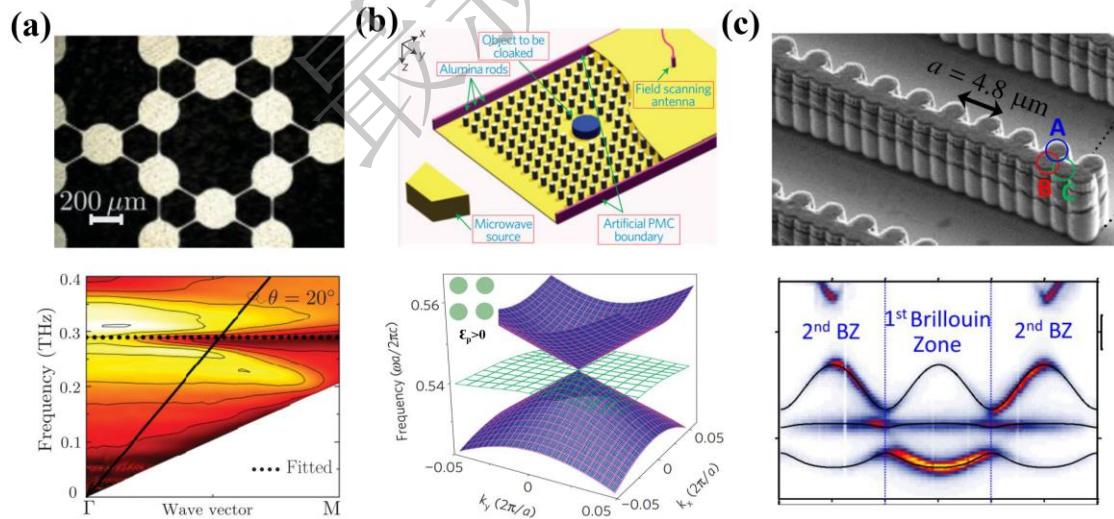


图 2 光子系统中平带研究的典型实例 (a) 上图为表面等离激元平带的金属 Kagome 超构材料, 下图为对应的太赫兹波透射图, 存在一个全角度的无辐射平带 (水平虚线所示)<sup>[48]</sup>; (b) 四方结构的全介质零折射率超构材料实现隐身效应实验装置, 下图为适当介质参数时得到的四方结构色散关系, 含有一个狄拉克锥与一个无色散平带<sup>[50]</sup>; (c) 一维“枕”型结构的微柱光学腔及其色散关系, 中间为平带<sup>[51]</sup>

Fig. 2. Examples of photonic flatband structures: (a) Kagome lattice for terahertz spoof plasmons, displaying an omnidirectional minimum in the transmission at the flatband frequency (dashed line) in bottom panel<sup>[48]</sup>; (b) Experimental setup exposing the zero-refractive-index all-dielectric metamaterials with a square lattice to realize cloaking inside a channel with the Dirac point, and

the bottom panel shows corresponding three-dimensional dispersion surfaces consisting of a Dirac cone and a flatband<sup>[50]</sup>; (c) Structured microcavity forming a 1D stub lattice and its photoluminescence spectrum, revealing a flatband in the middle<sup>[51]</sup>.

随着平带物理研究日益深入，在光子晶体、超构材料与光子晶格等光学系统中平带也得到了广泛研究并观察到了许多新颖的物理效应。特别地，平带光子微结构的最新研究进展为光场调控打开了一个新的大门。例如，平带对应波函数群速度为零，可以用来实现整个布里渊区的慢光效应。理论上，通过调整系统结构参数可以在多种不同结构的光子晶体波导中实现平带慢光效应<sup>[45-47]</sup>。在超构材料系统，Kitano 等人利用金属棒与金属圆盘构建了 Kagome 结构并直接观察到了太赫兹波等离激元平带<sup>[48]</sup>。从图 2 (a) 所示的透射谱中可以看到，平带所在的共振频率透射最小并且与入射角度无关。该研究组在二维 Lieb 结构中也观察到类似的性质<sup>[49]</sup>。与此同时，Huang 等人在介质棒构建的四方光子晶体中实现了等效零折射率超构材料并观察到了微波波段的隐身效应（图 2 (b)）<sup>[50]</sup>。在该结构中，通过改变参数调整偶极与单极模式的简并性，得到了与 Lieb 结构相似的能带，即一个锥形能带以及中间的平带。2016 年，Baboux 等人构建了基于微柱光学腔的一维“枕”型结构并直接观察到无色散的平带（图 2 (c)），同时，实验实现了平带对应的激子-极化激元凝聚态<sup>[51]</sup>。类似地，在最新研究中，Whittaker 与 Harder 等人理论与实验实现了 Lieb 结构中的平带激子-极化激元<sup>[52,53]</sup>。更有趣的是，Milićević 等人研究发现，在蜂窝型排列的极化激元耦合微米柱结构中，当引入人工拉伸形变时，其 P 轨道能带中的平带与抛物线能带交叉点会变成两个倾斜的狄拉克锥，当形变为特定值时会产生第三类狄拉克锥，因而在该系统中同时存在平带与多种形式的狄拉克锥<sup>[54]</sup>。近期的综述文章中，Leykam 等人对人工平带系统中的一些理论模型和实验研究进行了总结讨论<sup>[55,56]</sup>。

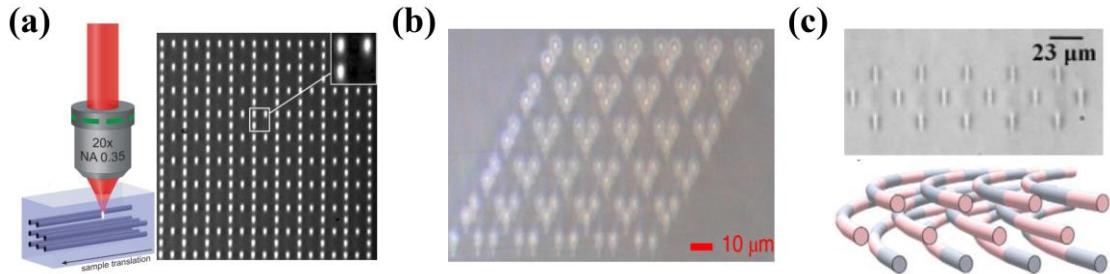


图 3 利用飞秒激光直写技术制备的平带光子晶格 (a) 用于研究平带局域模式的 Lieb 光子晶格<sup>[64,65]</sup>; (b) 用于研究拓扑角态的 Kagome 光子晶格<sup>[66]</sup>; (c) 用于实现 Aharonov-Bohm 效应的纵向弯曲菱形光子晶格<sup>[67,68]</sup>

Fig. 3. Examples of femtosecond laser-writing flatband photonic lattices: (a) A photonic Lieb lattice for demonstration of flatband compact localized states<sup>[64,65]</sup>; (b) a photonic Kagome lattice established for demonstration of topological corner states<sup>[66]</sup>; (c) a driven photonic rhombic lattice for experimental observation of Aharonov-Bohm cages<sup>[67,68]</sup>.

2004 年以来，飞秒激光直写技术成为制备介质波导的重要手段<sup>[57,58]</sup>，采用该方法制备了多种结构的耦合波导阵列，即光子晶格，这使得在光子晶格中研究新颖物理现象有了更加便利的平台。利用该技术，二维蜂窝型光子晶格（光子石墨烯）及其形变结构得以实现<sup>[59,60]</sup>。更重要的是，还可以进一步构建螺旋型的光子石墨烯晶格，从而实现光子拓扑绝缘体<sup>[61,62]</sup>，进而在拓扑激光器等方面得以应用<sup>[63]</sup>。得益于飞秒激光直写技术的进步，平带光子晶格研究也取得飞速进展。2015 年，两个独立的研究组分别制备了 Lieb 光子晶格（图 3 (a)），并首次实验观察到局域的平带本征模式<sup>[64,65]</sup>。最新的研究中，Hassan 等人利用飞秒激光直写技术在玻璃样品中成功构建了有限周期的 Kagome 光子晶格（图 3 (b)），并实现了新颖的拓扑角态<sup>[66]</sup>，这为进一步研究 Kagome 晶格中的平带性质和平带拓扑现象提供了平台。另一方面，Mukherjee 与 Kremer 等人分别利用飞秒激光直写技术制备了纵向弯曲的菱形结构（图 3 (c)），引入了人工 (artificial) 磁场，在该结构中实现了类比实现了 Aharonov-Bohm 效应<sup>[67,68]</sup>。此外，近几年，非厄米系统中平带也取得了一系列进展<sup>[69-75]</sup>，然而相关的研究均局限于理论研究。2019 年，Biesenthal 等人通过在纵向加入散射点在波导中引入损耗成功实现了非厄米的晶格哈密顿量，在实验上首次阐明了宇称时间 (parity-time, PT) 对称平带<sup>[76]</sup>。

### 3 光诱导光子晶格的制备

本文重点介绍另一种简单有效的制备光子晶格的方式，即光诱导技术。该方法是在光折变晶体中利用光诱导产生非线性折射率改变。与飞秒激光直写技术相比，光诱导方法在光折变材料中可以制备可重构的波导阵列。以下，详细介绍光诱导方法制备光子晶格的两种具体方式：第一种为多光束干涉光诱导技术，利用多束平面波干涉产生无衍射光场，在光折变晶体中诱导产生对应的晶格结构；另一种方式为连续激光直写技术，该方法是利用非线性自聚焦效应以及光折变晶体的非瞬时响应特性，在体材料中逐一写入每根波导最终形成波导阵列结构。

#### 3.1 多光束干涉光诱导技术

2003 年，Segev 与 Christodoulides 组提出多光束干涉光诱导的方法并利用该方法首次实验观察到二维光学离散孤子<sup>[22,23]</sup>。Chen 等人进一步提出了部分相干光干涉技术，该技术克服了相干光的调制不稳定性，能够产生折射率调制均匀的波导阵列<sup>[77,78]</sup>。目前，该方法被广泛应用到关于光子晶格的研究中，其实验装置如图 4 所示。高斯光经过旋转散射器调制后形成部分相干光，入射到振幅掩膜板上并在傅里叶面滤波后叠加形成无衍射光场。将该光场入射到铌酸锶钡(strontium barium niobite, SBN) 晶体中，在非线性条件下诱导产生波导阵列结构。多光束干涉光诱导技术不仅可以用来产生多种周期性光子晶格，同时也可以用来制备具有缺陷和特定边界等配置的晶格。例如，在最近的研究中，该方法作为非常有效的实验手段被用来制备光子石墨烯，并进一步来研究该结构的边缘态<sup>[59]</sup>与赝自旋<sup>[79-81]</sup>等物理现象。

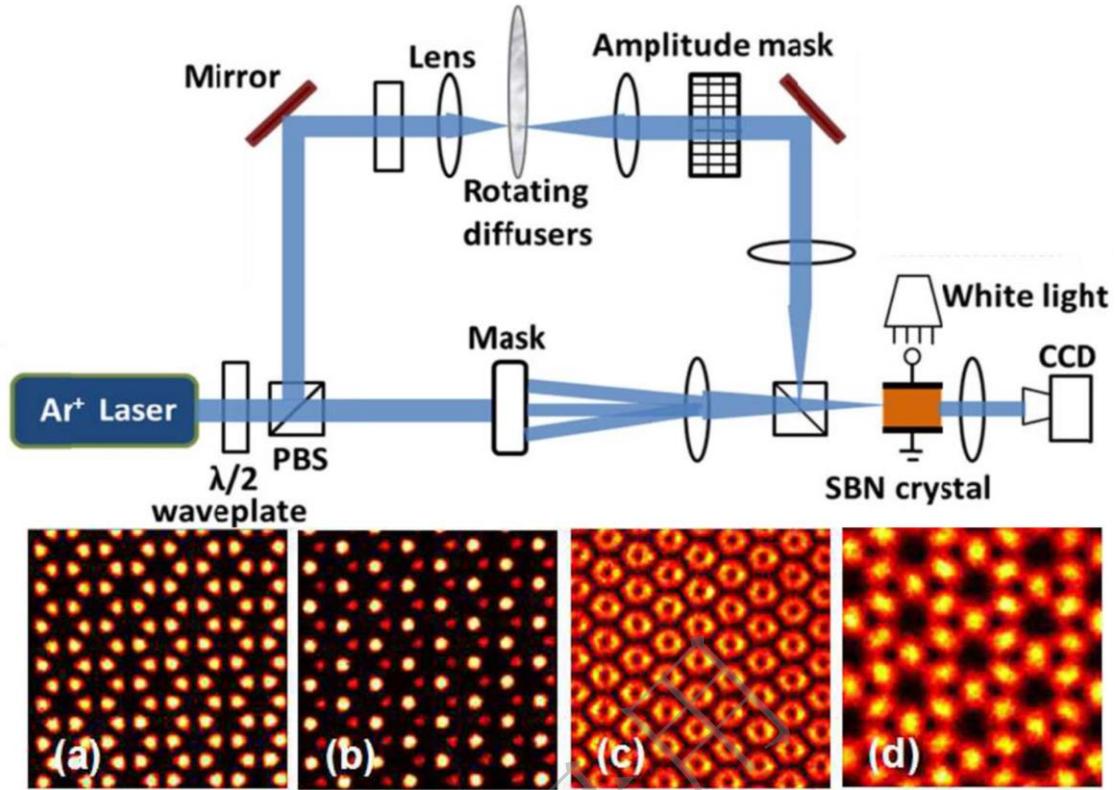


图 4 多光束干涉光诱导技术制备光子晶格<sup>[80,83]</sup>. 第一排: 实验光路图. PBS, 偏振分光棱镜; Mask, 掩膜板; SBN, 铷酸锶钡晶体. 第二排: 实验制作的典型光子晶格 (a) 蜂窝型光子晶格; (b) 对称破缺的蜂窝型光子晶格; (c) 涡旋晶格; (d) Kagome晶格

Fig. 4. Examples of photonic lattices created by multiple-beam optical induction method<sup>[80,83]</sup>: (Top panel) Schematic of experimental setup. PBS, polarized beam splitter; SBN, strontium barium niobite. (Bottom panel) Typical examples of photonic lattices realized in experiment. (a) A “perfect” honeycomb lattice; (b) an inversion-symmetry-breaking honeycomb lattice; (c) a vortex lattice; (d) a Kagome lattice.

制备光子晶格时要求诱导晶格的光场在传播方向上不变，因而使用该技术时首先需要利用多光束干涉产生相应的无衍射光场. Boguslawski 等人通过特殊滤波系统，给出了平面波叠加产生的多种离散无衍射光场<sup>[82]</sup>. 以六边形结构为例，利用振幅掩膜板和相位调制器在傅里叶频谱面上进行振幅和相位调制能够产生不同结构的衍射图样，如蜂窝型结构、Kagome 与涡旋三角型结构等<sup>[83]</sup>. 它们均可以通过波矢大小相同的六束平面波叠加产生，不同点在于初始相位调制不同. 理论上，在光折变晶体中这些无衍射光场均可以诱导产生对应的光子晶格结构.

除了 Kagome 晶格，其它平带结构同样可以利用多光束干涉光诱导技术制备.

Lieb 晶格是最简单的二维平带系统之一<sup>[31,64,65,84]</sup>, 由于该结构并非布拉菲格子, 想要通过多光束干涉振幅调制来制备 Lieb 光子晶格, 需要在实验装置中加入新的设计. Xia 等人利用两个或者多个简单光场的非相干叠加实现了该结构<sup>[85]</sup>. 该实验中, 首先通过四束平面波叠加分别构建一个“蛋托”(egg-crate)型晶格与一个四方结构对应的光场. 随后, 将两个干涉图样非相干叠加, 光强暗点构成 Lieb 结构对应的无衍射光场. 最终, 利用自散焦非线性效应在晶体中诱导实现了 Lieb 光子晶格. 这种多个光场非相干叠加的方法也被用来制备一维与二维超晶格<sup>[86-88]</sup>.

### 3.2 连续激光直写技术

利用多光束干涉光诱导的方法可以很方便的制备多种无边界的晶格结构. 然而, 实际研究中往往需要一些具有特殊边界的晶格. 例如, 对于石墨烯结构, 不同边界支持不同的边界态, 同时带来不同的物理效应<sup>[59]</sup>. 而在研究延展的线形平带局域态时, 就需要制备具有特定边界的平带光子晶格. 这里介绍一种逐点写入的连续激光直写技术<sup>[89]</sup>, 实验装置如图 5 所示. 一束 532 nm 的激光入射到空间光调制器上, 通过调制得到出射位置可控的高斯光. 经 4f 系统滤波后, 高斯光在 10 mm 长的 SBN 晶体内传输可认为是接近无衍射的. 在外加电场作用下, 由于非瞬时的自聚焦效应, 高斯光在晶体内形成近似孤子态并诱导形成波导. 通过计算机调控加载的相位, 可以灵活改变入射光的位置进而调整写入波导的位置, 在逐个写入波导后最终形成沿传播方向不变的波导阵列结构. 这种点对点的写入技术与多光束干涉方法完全不同, 不仅可以用来制备有限周期 Lieb 光子晶格<sup>[89]</sup>, 也可以用来产生任意边界的 Kagome<sup>[90]</sup>、超级蜂窝型晶格<sup>[91]</sup>与菱形晶格<sup>[92]</sup>等. 当然, 该方法有它的局限性, 由于相邻波导之间相互影响, 晶格的周期不能过小, 实验中采用周期不小于 26 μm. 在平带的研究中, 往往要求所制备的晶格结构满足紧束缚模型, 此时周期无需过小, 因此这种方法恰好能实现平带物理现象的相

关实验。类似地，无衍射的贝塞尔光也可以用来诱导制备波导阵列，然而贝塞尔光具有多个旁瓣，在构建波导的过程中各个贝塞尔光的旁瓣之间相互影响导致其同样不能用来制备小周期的晶格结构<sup>[93]</sup>。

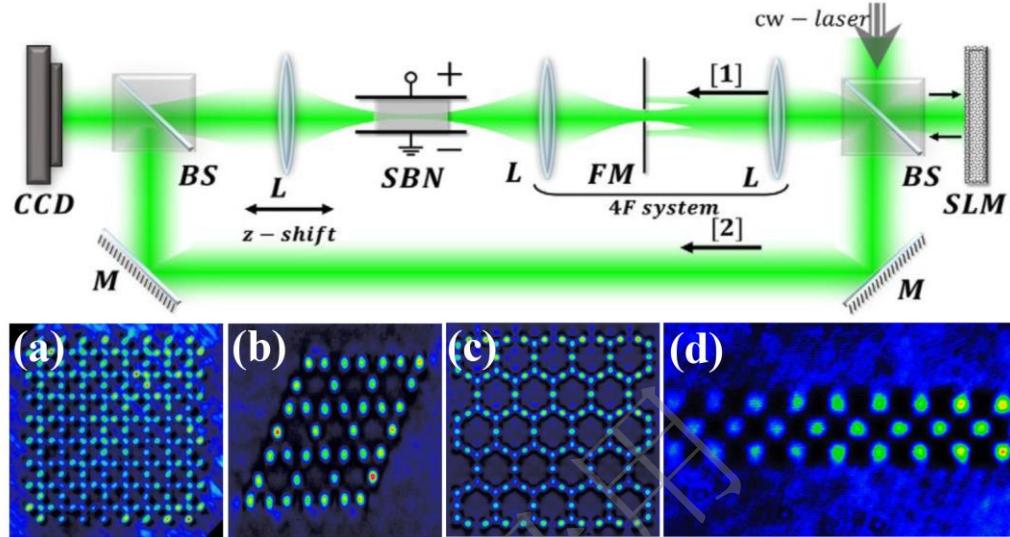


图 5 连续激光直写技术制备不同平带光子晶格。第一排为实验光路图: SLM, 空间光调制器; BS, 分光棱镜; FM, 傅里叶掩膜板。第二排为典型的直写光子晶格: (a) “胡须”边界 (“bearded” edges) 的 Lieb 光子晶格<sup>[89]</sup>; (b) 平滑边界的 Kagome 光子晶格<sup>[90]</sup>; (c) 超级蜂窝晶格<sup>[91]</sup>; (d) 横向折射率梯度变化的菱形光子晶格<sup>[92]</sup>。

Fig. 5. Examples of photonic lattices created by direct cw-laser-writing technique in a nonlinear bulk crystal: (Top panel) Illustration of experimental setup. SLM, spatial light modulator; BS, beam splitter; FM, Fourier mask; (Bottom panel) Typical examples of photonic lattices created by direct cw-laser-writing method. (a) A photonic Lieb lattice with “bearded” edges<sup>[89]</sup>; (b) a photonic Kagome lattice with flat boundary<sup>[90]</sup>; (c) a photonic sHCL<sup>[91]</sup>; (d) a driven photonic rhombic lattice with refractive index gradient parallel to the ribbon<sup>[92]</sup>.

#### 4 平带光子晶格中常规局域本征模式

平带的特征是存在紧凑的局域本征态，即本征模式会局域在有限的几个晶格格点上。自平带提出以来，实现直接观察这种局域本征态成为一个研究热点。以下，介绍在几种典型的光诱导平带光子晶格中关于该模式的实验进展，包括周期性结构与外场作用下的晶格结构。

Lieb 结构是最简单也是研究最多的二维平带结构之一。如图 6 (a) 所示，紧束缚近似下，其能带包括三个部分：两个锥形能带以及中间的一个无色散平带，

三个能带对称排列且在高对称点  $M$  点 ( $k_x=k_y=\pi$ ) 处交叉. 与蜂窝型晶格类似, 色散带构成的狄拉克锥带来很多有趣的现象. 例如, 锥形衍射<sup>[94]</sup>、赝自旋<sup>[95]</sup>以及拓扑边缘态<sup>[96]</sup>等. 与其它具有锥形能带的结构相比, Lieb 晶格明显不同在于其锥形能带中间存在一个完全无色散的平带. 2014 年, Guzmán-Silva 等人首次实现了 Lieb 光子晶格, 该研究讨论了在拉伸的晶格中实现边界模式<sup>[41]</sup>. 2015 年, Vicencio 与 Mukherjee 两个研究组分别在飞秒激光直写的 Lieb 光子晶格中首次实验报道了局域的平带模式<sup>[64,65]</sup>. Lieb 光子晶格中平带是手性对称保护的, 其与色散带之间的交叉受到实空间拓扑的保护<sup>[6]</sup>. 研究表明, 该系统的平带在无序条件下能够保持稳定<sup>[97-101]</sup>.

前文提到, Xia 等提出了一种简单有效的光诱导 Lieb 光子晶格的方法<sup>[85]</sup>. 在其构建的光诱导 Lieb 光子晶格中, 不仅实验观察到了局域的本征模式, 同时还实现了文本的传输. 实验结果如图 6 (a) 所示. 利用平带本征模式的叠加, 构建了文本“L”作为探测光. 当探测光相邻点保持反相位入射到晶体前表面时, 平带局域模式被激发, 探测光在晶体出射面能够很好的保持局域. 而当探测光所有点同相位时, 在出射面则表现为离散衍射现象. 该研究表明平带在图像传输方面具有潜在的应用前景.

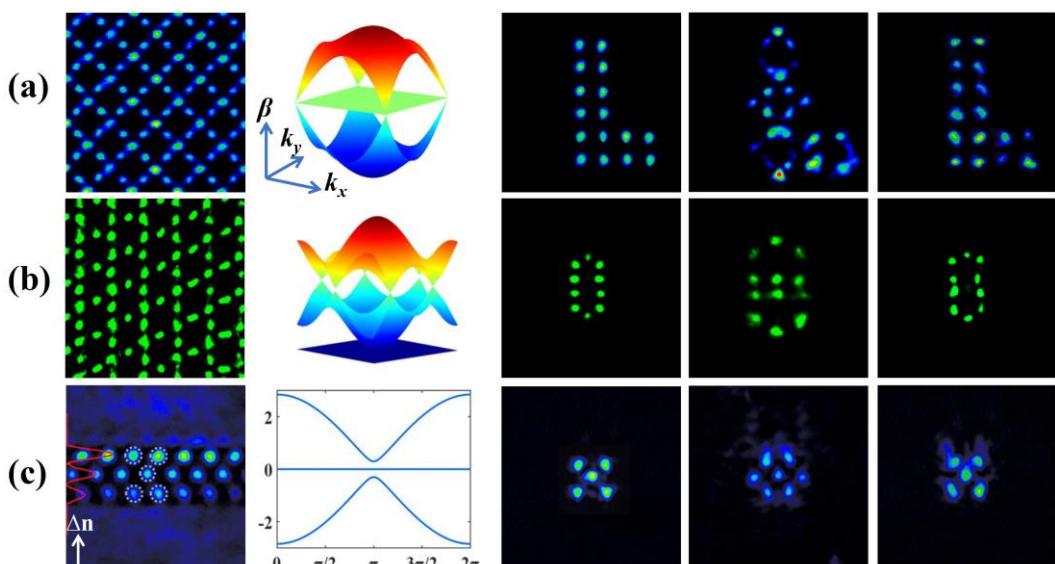


图 6 平带光子晶格常规紧凑局域模式的实验结果 (a) Lieb 光子晶格中基于平带模式的图像传输<sup>[85]</sup>; (b) Kagome 光子晶格中的平带局域模式<sup>[104]</sup>; (c) 折射率梯度场下菱形光子晶格中 U=2 的局域本征模式<sup>[92]</sup>. 从左至右: 实验制备的光诱导光子晶格结构、紧束缚近似下能带结构、入射面探测光、同相位输出以及反相位输出

Fig. 6. Experimental results of CLSs in flatband lattices: (a) linear image (formed by CLSs) propagation through an optically induced Lieb photonic lattice<sup>[85]</sup>; (b) a bound-state transmission in a Kagome photonic lattice<sup>[104]</sup>; (c) observation of a quincunx-shaped ( $U=2$ ) compact localized state which spans over two-unit cells in a photonic rhombic lattice<sup>[92]</sup>. From left to right: shown are the lattices, calculated band structures in the tight-binding approximation, probe beam inputs, and their in-phase and out-of-phase outputs.

与此同时, Kagome 光子晶格中的研究也取得了快速发展. 该结构可以看成是蜂窝结构与“沙漏”(sandglass) 结构构成, 其能带结构中同样包括狄拉克锥与平带. 2013 年, Vicencio 等人理论预言了非线性 Kagome 晶格模型中平带孤子的存在<sup>[102]</sup>. 随后, 在该结构中理论证实利用平带可实现无衍射图像传输<sup>[103]</sup>. 2016 年, Zong 等人利用多光束干涉诱导的方法制备了 Kagome 晶格结构, 并首次观察到了局域本征模式, 实验结果如图 6 (b) 所示<sup>[104]</sup>. 由于局域本征态的叠加仍然为系统本征模式, 实验中可以看到, 由两个简单局域模式叠加构成的探测光入射到晶格内后可以保持局域传输. 同样, 在该结构中利用多个平带本征模式的叠加也可以实现无衍射的图像传输, 而且 Kagome 晶格的局域本征态是六边形结构, 更利于构建环形或者链状的图像进行传输.

近来, 平带与外场的相互作用也同样受到了广泛关注. 外场作用下的平带展现出许多新颖的物理效应. 例如, 拓扑平带绝缘体<sup>[105-110]</sup>、平带朗道-齐纳布洛赫振荡 (Landau-Zener Bloch oscillations)<sup>[111,112]</sup>以及磁场作用下 Aharonov-Bohm 效应<sup>[67,68]</sup>. 在这些研究中存在一个重要的基本物理问题: 外加磁场下, 平带及其本征模式是如何变化的? Mukherjee 等人研究发现, 外场作用下的一维菱形结构的平带局域模式在是稳定的<sup>[113]</sup>. Khomeriki 等人理论研究表明该局域本征模式在外加电场与磁场作用下同样也能稳定存在<sup>[111]</sup>. 而 Kolovsky 对二维 dice 晶格的研究

表明，在外加场作用下其平带模式由紧凑的局域态变为指数衰减的形式<sup>[114]</sup>. 可以看到，相关的物理机制仍然不清晰且缺少实验证实. 为了解决这个问题，Xia 等人以一维菱形结构为例，在理论与实验上阐明了在具有水平或垂直方向折射率梯度的光子晶格中平带及其本征模式的变化，并且首次在实验上实现了 U=2 的局域本征态<sup>[92]</sup>. 实际上，一维菱形结构及其平带模式在多种系统中都得到了广泛讨论<sup>[111,113,115-117]</sup>. Xia 等人利用连续激光写入波导的方式，通过改变诱导光的相对光强制备了具有折射率梯度的一维菱形波导阵列. 实验结果如图 6 (c) 所示，此时的折射率梯度可等效于外加的直流电场. 在具有水平方向 ( $x$  方向) 梯度时，菱形结构的能带转化为瓦尼尔-斯塔克势阶 (Wannier-stark ladders) 的形式，但平带本征模式保持不变，仍为图 1 (a) 所示. 在垂直方向 ( $y$  方向) 梯度时，能带间带隙打开且平带能够很好的保持. 更重要的是，平带本征模式此时发生了根本的改变：由 U=1 的局域模式转变为占据两个原胞的 U=2 形式. 此外，当施加  $y$  方向折射率梯度场时，平带模式在传输过程中也能够保持局域. 在  $x$  方向折射率梯度作用下，虽然平带模式的叠加仍是系统的本征模式且传输过程中能够保持局域，然而其在动量空间能量分布却表现为周期性振荡形式.

## 5 Lieb 与超级蜂窝型晶格中非常规的线形平带模式

平带系统之所以能够支持紧凑的局域本征模式是由于布洛赫波函数之间的相干相消以及本征模式的宏观简并特性引起. Bergman 等人通过平带局域本征态的性质对平带模式进行分类<sup>[6]</sup>. 图 1 中，一系列能量相同紧凑排列的局域模式形成简并的本征态，全部的局域本征模式之间是相互独立且可以通过晶格的平移矢量联系在一起. 如果全部紧凑排列局域本征模式能够形成平带的完备集，则意味着对应的平带不存在陈数，在动量空间是拓扑平庸的. 而 Bergman 等人的理论指出，这样的紧凑局域本征模式并不总能够构成完备的平带模式. 在大部分几何“阻

挫”的耦合结构中，平带在动量空间通常在一些离散的动量点处与色散带交叉 (band-crossing) 或接触 (band-touching)，交叉点或者接触点处的能带简并说明该系统中紧凑排列的局域本征模式是不完备的。也就是说，存在一些“丢失”的态来构成完备的平带局域模式，该“丢失”态是一个在周期性边界条件下沿着圆环面的不可压缩的环形态，来自于系统的实空间拓扑特性。不可压缩环形态可以表征实空间的拓扑特性，因为在圆环面上不可压缩环形态不能通过连续的形变演化为紧凑局域模式，也不能由常规紧凑局域模式的线性叠加形成。这种非常规的平带模式与动量空间的平带接触紧密相关，受实空间拓扑保护，也就是说这样的能带接触点不能由微扰去除，除非微扰将平带破坏。不可压缩环形态是在圆环面上的缠绕 (winding)，所以这里的拓扑保护是在实空间而不是动量空间。Rhim 等人根据接触点的性质进一步将平带分为“奇异的”与“非奇异的”平带，不可压缩环形态的存在与平带不可消除的奇异点有关。对于“非奇异的”平带，紧凑局域本征模式能构成完整的平带，而对于“奇异的”平带，紧凑局域模式往往是不完备的<sup>[118]</sup>。一旦简并的交叉点被移除，平带可能变成色散带同时具有一个有限的陈数。这种不可压缩环形态对应的实空间拓扑与布洛赫波函数的动量空间拓扑完全不同。

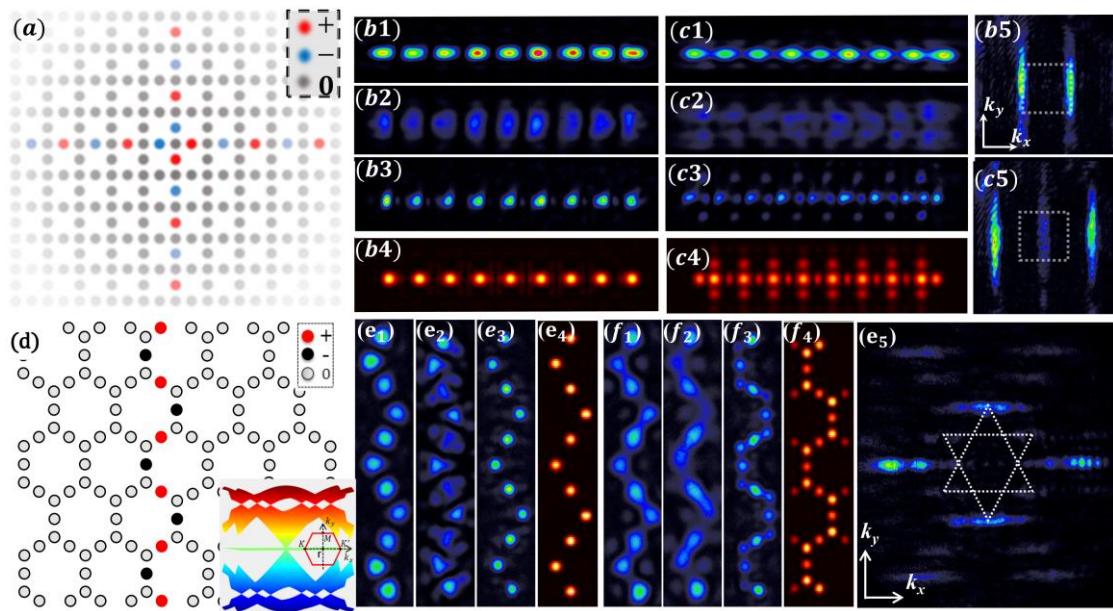


图 7 Lieb 与超级蜂窝光子晶格中非常规线形平带模式的实验结果<sup>[89,91]</sup>。(a),(d)非常规线形平

带局域模式的示意图，其中图 (d) 右下插图为能带结构；(b1), (e1) 反相位入射的探测光；(b2), (e2) 无晶格时的输出；(b3), (e3) 有晶格时的输出；(b4), (e4) 长距离传输的数值模拟结果；图(c1)-(c4)完全对应(b1)-(b4)，但为探测光同相位入射时的结果；图(f1)-(f4)对应(e1)-(e4)，但为探测光同相位入射时的结果；(b5), (c5)为对应(b3), (c3)的  $\mathbf{k}$  空间能谱，虚线框为第一布里渊区边界；(e5) 为对应于图(e3)的  $\mathbf{k}$  空间能量分布，其中虚线框表示第一与第二布里渊区边界

Fig. 7. Demonstration of unconventional line state in photonic Lieb and super-honeycomb lattices<sup>[89,91]</sup>: (a), (d) Schematic of flatband line states in infinite lattices, and inset in (d) shows the band structure of sHCL; (b1), (e1) out-of-phase input line beam; (b2), (e2) out-of-phase output without the lattice; (b3), (e3) out-of-phase output through the lattice; (b4), (e4) simulation results showing the out-of-phase line beam remains intact but the in-phase line deteriorates after propagating a long distance through the lattice; (b5) measured  $\mathbf{k}$ -space spectrum of (b3) with a dashed square marking the first Brillouin zone (BZ); (c1)-(c5) the same as in (b1)-(b5), and (f1)-(f4) the same as in (e1)-(e4) except that the line beam is in in-phase excitation condition; (e5) momentum space spectrum of (e3), where the white dashed lines outline the first and second BZs.

原则上，不可压缩环形态存在于无限的晶格中，在实验上是不可能实现的，因而平带实空间拓扑性质提出以后，相关的实验研究开展较少。最近研究发现，不可压缩环形态可以存在于具有特殊边界的有限周期晶格内，表现为依赖于边界的线形模式并且满足平带模式相干相消的条件。2018 年，Xia 等人通过连续激光直写技术制备了 Lieb 光子晶格并首次在实验报道了这种非常规的平带模式<sup>[89]</sup>。如图 7 (a) 所示，Lieb 光子晶格紧凑局域本征模式之间是线性独立的并且不形成完备正交基，因此需要不可压缩环形态的参与才能构成整个平带。Lieb 晶格中对应的是在一个方向延展的平带线形态。该研究中，首先利用连续激光写入方式构建了具有胡须状边界的 Lieb 光子晶格（图 5 (a)）。随后将由多个高斯光构成且具有反相位结构的探测光入射到晶体内（图 7 (b1)）。没有晶格存在时，探测光各个点在传输方向上衍射（图 7 (b2)）。有晶格作用时，入射光的光强能够很好的保持局域而不产生衍射效应（图 7 (b3)）。作为对比，将输入的探测光改为同相位的形式，可以看到在出射面探测光表现为离散衍射的形式（图 7 (c3)），即能量耦合到邻近波导中。更重要的是，同相位与反相位入射时具有完全不同的频谱能量分布。反相位时，频谱能量分布在布里渊区边界（图 7 (b5)），该点即

为能带交叉的位置，而同相位入射时，出射光的能量分布在布里渊区中心（图 7 (c5)）。这种非常规线形平带模式不能通过常规紧凑型的局域本征模式叠加得到而是来源于系统实空间拓扑特性。

Lieb 结构中平带与色散带在布里渊区边界相交叉，还有一些平带结构的能带交叉点发生在其它高对称点。例如超级蜂窝型晶格，这也是一种同时具有狄拉克锥与平带的晶格结构。在冷原子与光学系统中，人们已经理论研究了该结构中的狄拉克锥以及锥形衍射现象<sup>[119,120]</sup>，但缺少相关的实验研究。如图 7 (d) 所示，超级蜂窝型晶格单个原胞包含五个不同的格点，在紧束缚模型近似下，其能带包含五个带，一个完全平坦的能带与两个锥形带在第一布里渊区中心交叉，这与 Lieb 晶格中赝自旋为 1 的狄拉克锥相似。更有趣的是，该晶格中同样存在赝自旋为 -1/2 的狄拉克锥。由于平带与狄拉克锥在布里渊区中心交叉，在超级蜂窝型晶格中也存在线形平带模式。Yan 等人研究发现，在具有特定边界的有限周期晶格中，线形平带模式存在两种不同类型的形式<sup>[91]</sup>： $x$  方向的直线排列的线形模式，即局域模式的各点排列在一条直线上； $y$  方向的锯齿型模式，即局域模式的各点按锯齿形排列。两种模式在实空间表现出不同的形状，占据不同的子晶格并且都不能通过常规紧凑排列的局域本征模式叠加得到。图 7 (e) 为连续激光直写技术制备的胡须边界的蜂窝超晶格中锯齿型局域态的实验结果。为了激发这种局域模式，入射的探测光设计成锯齿状并垂直入射到晶格中。当反相位入射的探测光激发晶格时，探测光演化为锯齿型平带模式并在传输过程中保持局域（图 7 (e3)）。值得注意的是，这种锯齿状排列的局域态在 Lieb 与 Kagome 晶格中均不存在，是超级蜂窝型晶格所独有的。更有趣的是，线形平带模式的空间频谱分布在高阶布里渊区中心，这与 Lieb 晶格也明显不同。这些结果再次表明非常规线形局域模式的存在与平带和色散带之间的能带接触/交叉有关。

## 6 Carbino-Kagome 晶格中不可压缩环形态

在有限周期的 Lieb 与超级蜂窝晶格中，直线排列与锯齿状排列的局域态可以很好的保持。这是因为在这些晶格系统里，有限的线形态可以满足平带的相干相消。它们是系统的平带本征态，表征由于色散带与平带交叉所“丢失”的不可压缩环形态。那么一个自然的问题是，这种线形态是否存在与其它平带结构中？研究发现，不同的平带晶格情况并不一样。以 Kagome 结构为例，由于实验上无法制备无限周期结构或者圆环型晶格，其不可压缩环形态在有限 Kagome 周期结构还没有被发现。事实上，尽管 Lieb 与 Kagome 晶格都具有“奇异的”平带，但相关理论研究发现，线形态在截断的 Kagome 晶格中不是系统的本征态，因而不能够存在。晶格特定的空间拓扑结构决定所允许的本征态，Kagome 晶格与 Lieb 晶格就明显不同<sup>[90]</sup>。

是否能够找到其它观察 Kagome 结构中不可压缩环形态的方法呢？最近，Ma 等人的实验中给出了两种不同的方式来解决这个问题<sup>[90]</sup>。一方面，实验上在特定边界的有限周期晶格中实现了环绕到整个晶格的稳定边界模。这种边界模式可以对应三维圆环面展开到二维平面时不可压缩的环形本征态叠加产生，在有微扰时能够稳定存在，并能在传输过程中排除边界缺陷，产生“自愈”效应。另一方面，通过构建 Corbino 型的 Kagome 结构来实现晶格至少一个方向的周期性，在该晶格中直接观察到不可压缩环形态。

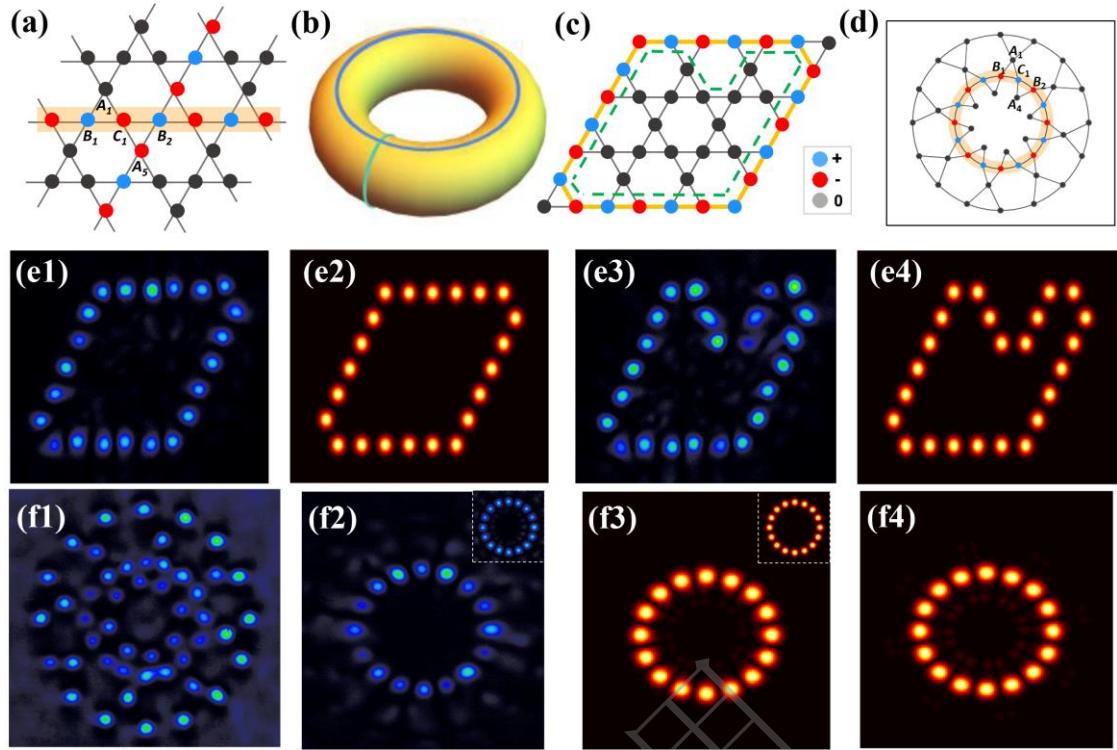


图 8 (a) Kagome 晶格中两种不可压缩环形态示意图; (b) 模拟无限 Kagome 晶格两个不可压缩环形态的圆环面; (c) 在平滑边界的 Kagome 晶格中两种稳定的平带边界局域模, 橘黄色线代表模式一, 绿色虚线代表模式二; (d) Corbino-Kagome 结构示意图, 橘黄色圆环代表不可压缩的局域环形态.(e) 从左至右 (e1), (e2) 边界模式一的反相位输出与对应数值模拟结果; (e3), (e4) 边界模式二的反相位输出与对应数值模拟结果; (f1) 实验制备的 Corbino-Kagome 光子晶格; (f2), (f3) 反相位激发的不可压缩环形态及其对应数值模拟结果; (f4) 40 mm 传输时数值模拟结果. 图中所有插图均代表输入探测光. 同相位激发破坏所有平带局域模式的形成<sup>[90]</sup>

Fig. 8. (a) Illustration of the NLSs in an infinitely extended Kagome lattice; (b) a torus showing two NLSs mimicking the 2D infinite lattice; (c) two Robust Boundary Modes (RBMs) in a Kagome lattice with flat cutting edges, where black sites are of zero-amplitude, while blue and red ones distinguish non-zero sites with opposite phase; (d) Schematic diagram of the Corbino-shaped Kagome lattice, where the NLS is illustrated by the orange circle; (e) from left to right (e1), (e3) experimental results of RBM1 and RBM2 under out-of-phase condition; (e2), (e4) simulation result corresponding to (e1) and (e3); (f1) experimentally established finite-sized Kagome lattice in a Corbino-geometry; (f2)-(f4) the NLS observed in (f2) experiment and simulations after propagation to (f3) 10 mm and (f4) 40 mm under out-of-phase condition; All insets are from input ring necklace of the probe beam. In-phase excitation destroys all localized states.<sup>[90]</sup>

首先看方式一. 图 8 (a) 与 (b) 表示在无限周期的 Kagome 晶格或者圆环中不可压缩的平带本征模. 图 8 (c) 为揭示不可压缩的平带本征模的两种稳定边界模式 (RBM), 其中橘黄色线代表模式一, 用 RBM1 表示, 绿色线代表模式

二, 用 RBM2 表示. RBM1 可以认为是沿着圆环面和径向两个方向切断圆环形成的四个不可压缩环形态的叠加. 如图 8 (b) 所示, 这如同沿着圆环上的两条线截断圆环, 如果在这个环内有两对不可压缩环形态, 那么沿着这两对模式切断这个圆环, 将其展开可以形成一个四边打开的有限周期的晶格. 在有限周期晶格边界存在的这个态 RBM1, 就被认为是四个不可压缩环形态叠加. 为了观察这种局部边界模式, Ma 等人在实验上首先构建了具有平坦边界的 Kagome 光子晶格, 见图 5 (b). 一束由多个高斯光构成的探测光被调制成反相位排列的平行四边形形状, 当探测光入射到晶格边界时, 可以看到在出射面探测光能够很好的保持局部 (图 8 (e1)). RBM2 可以看成是 RBM1 和一个常规紧凑局部模式的叠加, 因而相对于 RBM1 有两个缺陷点. 很明显, 反相位激发形成的 RBM2 在晶格中传输也仍然可以很好的保持局部 (图 8 (e3)). 该研究表明, 在有特殊边界的 Kagome 晶格中, 可以实现由不可压缩环形态引起的稳定边界局部模式. 此外, 该研究也进一步说明这样的边界局部模式不仅在传输时能够保持局部, 并且具有抵抗微扰的能力.

另一种直接实现不可压缩环形态的方法为设计和制备如图 8 (d) 所示的 Corbino-Kagome 晶格. 这种特殊设计的结构等效于沿着 Kagome 晶格的一个方向实现了周期性边界条件, 因而可以实现沿着一个圆环曲面方向的不可压缩环形态. 该结构中, 每一环的 B, C 子晶格距离是相等的, 并且随着半径增加而增加. A 与 B (C) 的间距同样相同, 但每个环是不同的. 实验中, 可以通过连续激光直写方式制备该光子晶格, 如图 8 (f1) 所示. 为了观察环形局部模式, 一个反相位的环形链状探测光入射到晶格内激发相应的平带局部模式, 对应的实验结果如图 8 (f2) 所示, 可以观察到, 链状探测光在晶体内传输后能够很好的局部在入射格

点上。这一结果可以认为是首次直接实验观测到由实空间拓扑决定的平带系统中不可压缩环形态。

## 7 总结与展望

本文回顾了具有平带的光子学微结构中光局域效应最新研究进展。以光诱导、连续光直写光子晶格为平台，介绍了包括设计和实现各种形状和边界的晶格结构制备技术，并在这些平带光子学微结构中实现常规紧凑型的平带局域本征模式和由实空间拓扑引起的非常规平带本征模式。这些研究为开拓平带光子微结构，实现光局域<sup>[64,65]</sup>、图像传输<sup>[85,103]</sup>与平带模激光输出<sup>[121]</sup>等应用方面提供了新的方向。

近来，关于光学微结构中平带物理效应的研究越来越多。很多新颖的物理效应有待进一步探究。例如，PT 对称平带的实现为非厄米系统中平带的实验研究提供了平台<sup>[76]</sup>，该研究可以进一步拓展到二维平带结构同时探讨非线性相互作用等。  
Lim 等人在对 Lieb 与 Kagome 晶格研究中发现，Lieb 晶格转换成 Kagome 晶格过程中平带能够演变为狄拉克点<sup>[122]</sup>。这表明 Lieb 与 Kagome 晶格，平带与狄拉克点之间存在潜在的关联<sup>[123]</sup>，相关的物理机制值得进一步探索。此外，最新的研究中，Wang 等人利用光诱导的方法成功制备了二维摩尔光子晶格 (photonic Moiré lattices)，并且能够选择旋转的角度<sup>[124]</sup>。摩尔晶格的实现表明，任意几何结构的变化与子晶格之间的对称性有关，同时该研究中还发现了在特定旋转角度时平带的存在，为摩尔晶格中的平带现象的进一步研究提供了条件<sup>[125]</sup>。

总之，对平带人工光子学微结构与平带局域和拓扑特性的研究为我们理解相关的基本物理概念和现象提供了新的视角。可以断定，对凝聚态物理、冷原子系统、超构材料与光子学系统中平带物理引发的新颖现象的研究及相关应用的开拓方兴未艾，有着诱人的前景。

衷心感谢D. Leykam, S. Flach, J. W. Rhim, B. J. Yang, C. Danieli 与 R. A. Vicencio 等人的合作和对本论文的帮助。

## 参考文献

- [1] Ramirez A P 1994 *Annu. Rev. Mater. Sci.* **24** 453
- [2] Huse D A, Rutenberg A D 1992 *Phys. Rev. B* **45** 7536
- [3] Chalker J T, Holdsworth P C, Shender E F 1992 *Phys. Rev. Lett.* **68** 855
- [4] Moessner R, Chalker J T 1998 *Phys. Rev. B* **58** 12049
- [5] Moessner R, Ramirez A P 2006 *Phys. Today* **59** 24
- [6] Bergman D L, Wu C, Balents L 2008 *Phys. Rev. B* **78** 125104
- [7] Huber S D, Altman E 2010 *Phys. Rev. B* **82** 184502
- [8] Nixon M, Ronen E, Friesem A A, Davidson N 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 184102
- [9] Möller G, Cooper N R 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 045306
- [10] Yin J X, Zhang S S, Li H, Jiang K, Chang G, Zhang B, Lian B, Xiang C, Belopolski I, Zheng H, Cochran T A, Xu S Y, Bian G, Liu K, Chang T R, Lin H, Lu Z Y, Wang Z, Jia S, Wang W, Hasan M Z 2018 *Nature* **562** 91
- [11] Yin J X, Zhang S S, Chang G, Wang Q, Tsirkin S S, Guguchia Z, Lian B, Zhou H, Jiang K, Belopolski I, Shumiya N, Multer D, Litskevich M, Cochran T A, Lin H, Wang Z, Neupert T, Jia S, Lei H, Hasan M Z 2019 *Nat. Phys.* **15** 443
- [12] Xie Y, Lian B, Jäck B, Liu X, Chiu C L, Watanabe K, Taniguchi T, Bernevig B A, Yazdani A 2019 *Nature* **572** 101
- [13] Tang E, Mei J W, Wen X G 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 236802
- [14] Sun K, Gu Z, Katsura H, Sarma S D 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 236803
- [15] Neupert T, Santos L, Chamon C, Mudry C 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 236804
- [16] Sheng D N, Gu Z C, Sun K, Sheng L 2011 *Nat. Commun.* **2** 389
- [17] Cao Y, Fatemi V, Demir A, Fang S, Tomarken S L, Luo J Y, Sanchez-Yamagishi J D, Watanabe K, Taniguchi T, Kaxiras E, Ashoori R C, Jarillo-Herrero P 2018 *Nature* **556** 80
- [18] Cao Y, Fatemi V, Fang S, Watanabe K, Taniguchi T, Kaxiras E, Jarillo-Herrero P 2018 *Nature* **556** 43
- [19] Kopnin N B, Heikkilä T T, Volovik G E 2011 *Phys. Rev. B* **83** 220503
- [20] Tang E, Fu L 2014 *Nat. Phys.* **10** 964
- [21] Iglovikov V I, Hébert F, Grémaud B, Batrouni G G, Scalettar R T 2014 *Phys. Rev. B* **90** 094506

- [22] Fleischer J W, Segev M, Efremidis N K, Christodoulides D N 2003 *Nature* **422**, 147
- [23] Efremidis N K, Sears S, Christodoulides D N, Fleischer J W, Segev M 2002 *Phys. Rev. E* **66** 046602
- [24] Chen Z, Segev M, Christodoulides D N 2012 *Rep. Prog. Phys.* **75** 086401
- [25] Longhi S, Marangoni M, Lobino M, Ramponi R, Laporta P, Cianci E, Foglietti V 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 243901
- [26] Szameit A, Garanovich I L, Heinrich M, Sukhorukov A A, Dreisow F, Pertsch T, Nolte S, Tünnermann A, Kivshar Y S 2009 *Nat. Phys.* **5**, 271
- [27] Schwartz T, Bartal G, Fishman S, Segev M 2007 *Nature* **446**, 52
- [28] Lahini Y, Avidan A, Pozzi F, Sorel M, Morandotti R, Christodoulides D N, Silberberg Y 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 013906
- [29] Sutherland B 1986 *Phys. Rev. B* **34** 5208
- [30] Arai M, Tokihiro T, Fujiwara T, Kohmoto M 1988 *Phys. Rev. B* **38** 1621
- [31] Lieb E H 1989 *Phys. Rev. Lett.* **62** 1201
- [32] Mielke A 1991 *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** L73
- [33] Mielke A 1991 *J. Phys. A: Math. Gen.* **24** 3311
- [34] Mielke A 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 4312
- [35] Tasaki H 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 1608
- [36] Tasaki H 1998 *Prog. Theor. Phys.* **99** 489
- [37] Aoki H, Ando M, Matsumura H 1996 *Phys. Rev. B* **54** R17296
- [38] Slot M R, Gardenier T S, Jacobse P H, van Miert G C, Kempkes S N, Zevenhuizen S J, Smith C M, Vanmaekelbergh D, Swart I 2017 *Nat. Phys.* **13** 672
- [39] Jo G B, Guzman J, Thomas C K, Hosur P, Vishwanath A, Stamper-Kurn D M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 045305
- [40] Taie S, Ozawa H, Ichinose T, Nishio T, Nakajima S, Takahashi Y 2015 *Sci. Adv.* **1**, e1500854
- [41] Guzmán-Silva D, Mejía-Cortés C, Bandres M A, Rechtsman M C, Weimann S, Nolte S, Segev M, Szameit A, Vicencio R A 2014 *New J. Phys.* **16** 063061
- [42] Makasyuk I, Chen Z, Yang J 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 223903
- [43] Flach S, Leykam D, Bodyfelt J D, Matthies P, Desyatnikov A S 2014 *Eur. Phys. Lett.* **105** 30001
- [44] Ramachandran A, Andreanov A, Flach S 2017 *Phys. Rev. B* **96** 161104
- [45] Li J, White T P, O’Faolain L, Gomez-Iglesias A, Krauss T F 2008 *Opt. Express*

- [46] Schulz S A, Upham J, O'Faolain L, Boyd R W 2017 *Opt. Lett.* **42** 3243
- [47] Myoung N, Park H C, Ramachandran A, Lidorikis E, Ryu J W 2019 *Sci. Rep.* **9** 2862
- [48] Nakata Y, Okada T, Nakanishi T, Kitano M 2012 *Phys. Rev. B* **85** 205128
- [49] Kajiwara S, Urade Y, Nakata Y, Nakanishi T, Kitano M 2016 *Phys. Rev. B* **93** 075126
- [50] Huang X, Lai Y, Hang Z H, Zheng H, Chan C T 2011 *Nat. Mater.* **10** 582
- [51] Baboux F, Ge L, Jacqmin T, Biondi M, Galopin E, Lemaître A, Gratiet L L, Sagnes I, Schmidt S, Türeci H E, Amo A, Bloch J 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 066402
- [52] Whittaker C E, Cancellieri E, Walker P M, Gulevich D R, Schomerus H, Vaitiekus D, Royall B, Whittaker D M, Clarke E, Iorsh I V, Shelykh I A, Skolnick M S, Krizhanovskii D N 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 097401
- [53] Harder T H, Egorov O A, Beierlein J, Gagel P, Michl J, Emmerling M, Schneider C, Peschel U, Höfling S, Klembt S 2020 arXiv 2002.05405
- [54] Milićević M, Montambaux G, Ozawa T, Jamadi O, Real B, Sagnes I, Lemaître A, Gratiet L L, Harouri A, Bloch J, Amo A 2019 *Phys. Rev. X* **9** 031010
- [55] Leykam D, Andrianov A, Flach S 2018 *Adv. Phys. X* **3** 1473052
- [56] Leykam D, Flach S 2018 *APL Photonics* **3** 070901
- [57] Pertsch T, Peschel U, Lederer F, Burghoff J, Will M, Nolte S, Tünnermann A 2004 *Opt. Lett.* **29** 468
- [58] Szameit A, Blömer D, Burghoff J, Schreiber T, Pertsch T, Nolte S, Tünnermann A, Lederer F 2005 *Opt. Express* **13** 10552
- [59] Plotnik Y, Rechtsman M C, Song D, Heinrich M, Zeuner J M, Nolte S, Lumer Y, Malkova N, Xu J, Szameit A, Chen Z, Segev M 2014 *Nat. Mater.* **13** 57
- [60] Rechtsman M C, Zeuner J M, Tünnermann A, Nolte S, Segev M, Szameit A 2013 *Nat. Photonics* **7** 153
- [61] Rechtsman M C, Zeuner J M, Plotnik Y, Lumer Y, Podolsky D, Dreisow F, Nolte S, Segev M, Szameit A 2013 *Nature* **496**, 196
- [62] Rechtsman M C, Plotnik Y, Zeuner J M, Song D, Chen Z, Szameit A, Segev M 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 103901
- [63] Ivanov S K, Zhang Y, Kartashov Y V, Skryabin D V 2019 *APL Photonics* **4** 126101
- [64] Mukherjee S, Spracklen A, Choudhury D, Goldman N, Öhberg P, Andersson E,

- Thomson R R 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 245504
- [65] Vicencio R A, Cantillano C, Morales-Inostroza L, Real B, Mejía-Cortés C, Weimann S, Szameit A, Molina M I 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 245503
- [66] El Hassan A, Kunst F K, Moritz A, Andler G, Emil J, Bergholtz E J, Bourennane M 2019 *Nat. Photonics* **13**, 697
- [67] Mukherjee S, Di Liberto M, Öhberg P, Thomson R R, Goldman N 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 075502
- [68] Kremer M, Petrides I, Meyer E, Heinrich M, Zilberberg O, Szameit A 2018 arXiv 1805.05209
- [69] Zyuzin A A, Zyuzin A Y 2018 *Phys. Rev. B* **97** 041203
- [70] Ramezani H 2017 *Phys. Rev. A* **96** 011802
- [71] Leykam D, Flach S, Chong Y D 2017 *Phys. Rev. B* **96** 064305
- [72] Qi B, Zhang L, Ge L 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 093901
- [73] Ge L 2018 *Photonics Res.* **6** A10
- [74] Ge L 2015 *Phys. Rev. A* **92** 052103
- [75] Molina M I 2015 *Phys. Rev. A* **92** 063813
- [76] Biesenthal T, Kremer M, Heinrich M, Szameit A 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 183601
- [77] Chen Z, Klinger J, Christodoulides D N 2002 *Phys. Rev. E* **66**, 066601
- [78] Martin H, Eugenieva E D, Chen Z, Christodoulides D N 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 123902
- [79] Song D, Leykam D, Su J, Liu X, Tang L, Liu S, Zhao J, Efremidis N K, Xu J, Chen Z 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 123903
- [80] Song D, Paltoglou V, Liu S, Zhu Y, Gallardo D, Tang L, Xu J, Ablowitz M, Efremidis N K, Chen Z 2015 *Nat. Commun.* **6** 6272
- [81] Song D, Liu S, Paltoglou V, Gallardo D, Tang L, Zhao J, Xu J, Efremidis N K, Chen Z 2015 *2D Mater.* **2** 034007
- [82] Boguslawski M, Rose P, Denz C 2011 *Phys. Rev. A* **84** 013832
- [83] Gao Y, Song D, Chu S, Chen Z 2014 *IEEE Photonics J.* **6** 2201806
- [84] Shen R, Shao L B, Wang B, Xing D Y 2010 *Phys. Rev. B* **81** 041410
- [85] Xia S, Hu Y, Song D, Zong Y, Tang L, Chen Z 2016 *Opt. Lett.* **41** 1435
- [86] Malkova N, Hromada I, Wang X, Bryant G, Chen Z 2009 *Opt. Lett.* **34** 1633
- [87] Malkova N, Hromada I, Wang X, Bryant G, Chen Z 2009 *Phys. Rev. A* **80** 043806
- [88] Boguslawski M, Kelberer A, Rose P, Denz C 2012 *Opt. Express* **20** 27331
- [89] Xia S, Ramachandran A, Xia S, Li D, Liu X, Tang L, Hu Y, Song D, Xu J,

- Leykam D, Flach S, Chen Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 263902
- [90] Ma J, Rhim J W, Tang L, Xia S, Wang H, Zheng X, Xia S, Song D, Hu Y, Li Y, Yang B J, Leykam D, Chen Z 2019 arXiv 1911.00848
- [91] Yan W, Zhong H, Song D, Zhang Y, Xia S, Tang L, Leykam D, Chen Z 2019 arXiv 1912.12657
- [92] Xia S, Danieli C, Yan W, Li D, Xia S, Ma J, Lu H, Song D, Tang L, Flach S, Chen Z 2020 *APL Photonics* **5** 016107
- [93] Travkin E, Diebel F, Denz C 2017 *Appl. Phys. Lett.* **111** 011104
- [94] Diebel F, Leykam D, Kroesen S, Denz C, Desyatnikov A S 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 183902
- [95] Leykam D, Bahat-Treidel O, Desyatnikov A S 2012 *Phys. Rev. A* **86** 031805
- [96] Bandres M A, Rechtsman M C, Szameit A, Segev M 2014 Conference on Lasers and Electro-Optics (CLEO) - Laser Science to Photonic Applications, San Jose, CA, USA, June 8-13, 2014 p. FF2D.3.
- [97] Goda M, Nishino S, Matsuda H 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 126401
- [98] Leykam D, Flach S, Bahat-Treidel O, Desyatnikov A S 2013 *Phys. Rev. B* **88** 224203
- [99] Bodyfelt J D, Leykam D, Danieli C, Yu X, Flach S 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 236403
- [100] Gligorić G, Maluckov A, Hadžievski L, Flach S, Malomed B A 2016 *Phys. Rev. B* **94** 144302
- [101] Leykam D, Bodyfelt J D, Desyatnikov A S, Flach S 2017 *Eur. Phys. J. B* **90** 1
- [102] Vicencio R A, Johansson M 2013 *Phys. Rev. A* **87** 061803
- [103] Vicencio R A, Mejía-Cortés C 2013 *J. Opt.* **16** 015706
- [104] Zong Y, Xia S, Tang L, Song D, Hu Y, Pei Y, Su J, Li Y, Chen Z 2016 *Opt. Express* **24** 8877
- [105] Guo H, Shen S Q, Feng S 2012 *Phys. Rev. B* **86** 085124
- [106] Weeks C, Franz M 2012 *Phys. Rev. B* **85** 041104
- [107] Liu Z, Bergholtz E J, Fan H, Läuchli A M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 186805
- [108] Bergholtz E J, Liu Z 2013 *Int. J. Mod. Phys. B* **27** 1330017
- [109] Kalesaki E, Delerue C, Smith C M, Beugeling W, Allan G, Vanmaekelbergh D 2014 *Phys. Rev. X* **4** 011010
- [110] Pal B 2018 *Phys. Rev. B* **98** 245116
- [111] Khomeriki R, Flach S 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 245301
- [112] Long Y, Ren J 2017 arXiv 1706.01107
- [113] Mukherjee S, Thomson R R 2017 *Opt. Lett.* **42** 2243

- [114] Kolovsky A R, Ramachandran A, Flach S 2018 *Phys. Rev. B* **97** 045120
- [115] Yulin A V, Konotop V V 2013 *Opt. Lett.* **38** 4880
- [116] Longhi S 2014 *Opt. Lett.* **39** 5892
- [117] Mukherjee S, Thomson R R 2015 *Opt. Lett.* **40** 5443
- [118] Rhim J W, Yang B J 2019 *Phys. Rev. B* **99** 045107
- [119] Shima N, Aoki H 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 4389
- [120] Zhong H, Zhang Y, Zhu Y, Zhang D, Li C, Zhang Y, Li F, Belić M R, Xiao M 2017 *Ann. Phys.* **529** 1600258
- [121] Longhi S 2019 *Opt. Lett.* **44** 287
- [122] Lim L K, Fuchs J N, Piéchon F, Montambaux G 2020 *Phys. Rev. B* **101** 045131
- [123] Jiang W, Kang M, Huang H, Xu H, Low T, Liu F 2019 *Phys. Rev. B* **99** 125131
- [124] Wang P, Zheng Y, Chen X, Huang C, Kartashov Y V, Torner L, Konotop V V, Ye F 2020 *Nature* **577** 42
- [125] Abouelkomsan A, Liu Z, Bergholtz E J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 106803

# Novel phenomena in flatband photonic structures: From localized states to real-space topology

Xia Shi-Qiang<sup>1) 2) #</sup> Tang Li-Qin<sup>1) #</sup> Xia Shi-Qi<sup>1)</sup> Ma Ji-Na<sup>1)</sup> Yan Wen-Chao<sup>1)</sup> Song Dao-Hong<sup>1) 3) †</sup>

Hu Yi<sup>1)</sup> Xu Jing-Jun<sup>1) 3) ‡</sup> Chen Zhi-Gang<sup>1) 3) §</sup>

1) (The MOE Key Laboratory of Weak-Light Nonlinear Photonics, TEDA Applied Physics

Institute and School of Physics, Nankai University, Tianjin 300457, China)

2) (School of Physics, Henan Normal University, Xinxiang 453007, China)

3) (Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan, Shanxi 030006,

In recent years, flatband systems have attracted considerable interest in different branches of physics, from condensed-matter physics to engineered flatband structures such as in ultracold atoms, various metamaterials, electronic materials, and photonic waveguide arrays.

Flatband localization, as an important phenomenon in solid state physics, is of broad interest in exploration of many fundamental physics of many-body systems. We present a brief overview of recent experimental advances of light localization in engineered flatband lattices, with emphasis on the optical induction technique of various photonic lattices and unconventional flatband states. The photonic lattices, established by various optical induction techniques, include quasi-one-dimensional diamond lattices and two-dimensional super-honeycomb, Lieb and

Kagome lattices. Nontrivial flatband line states, independent from linear superpositions of conventional compact localized states, are demonstrated in photonic Lieb and super-honeycomb lattices, and they can be considered as an indirect illustration of the non-contractible loop states. Furthermore, we discuss alternative approaches to directly observe the non-contractible loop states in photonic Kagome lattices. These robust loop states are direct manifestation of real-space topology in such flatband systems. While this review is not intended to be a comprehensive account of the vast flatband literature, but rather a brief review of relevant work with photonic lattices mainly from our group, we hope the concept and techniques presented can be further explored and developed for subsequent applications in other structured photonic media such as photonic crystals, metamaterials, and other synthetic nanophotonic materials.

Keywords: Photonic microstructure; Flatband; Localized states; Real-space topology

\* Project supported by the National Key Research and Development Program of China (Grant No. 2017YFA0303800), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 91750204, 11922408, 11704102, 11674180), and the 111 Project (Grant No. B07013).

# These authors contributed equally.

† Corresponding author. E-mail: [songdaohong@nankai.edu.cn](mailto:songdaohong@nankai.edu.cn);

‡ Corresponding author. E-mail: [jxu@nankai.edu.cn](mailto:jxu@nankai.edu.cn);

§ Corresponding author. E-mail: [zgchen@nankai.edu.cn](mailto:zgchen@nankai.edu.cn);