黎曼几何

作者：王文龙 (wangwl@nankai.edu.cn)

ElegantLATEX Program

目录

第 1 章 黎曼流形 **1**

1.1 黎曼流形的定义 1
1.2 黎曼度量的存在性 1
1.3 黎曼流形的构造方法 2
1.4 典型例子 2
1.5 等距 3
1.6 双曲空间不同模型间的等距 4

第 2 章 黎曼联络 **5**

2.1 流形上的高阶求导问题 5
2.2 仿射联络 5
2.3 Hessian 与挠率 6
2.4 对张量场求协变导数 6
2.5 黎曼联络 8
2.6 黎曼子流形的诱导联络 9
2.7 黎曼流形上的代数和微分算子 10
2.7.1 升降调算子 10
2.7.2 取迹和范数 11
2.7.3 梯度 (gradient) 11
2.7.4 散度 (divergence) 12
2.7.5 Hessian 和 Laplacian 12
2.7.6 散度定理 13

第 3 章 平行移动 **15**

3.1 向量场的平行移动 15
3.2 平行移动与协变导数 16
3.3 和乐群 16

第 4 章 曲率 **18**

4.1 曲率张量 18
4.2 三种曲率 20
4.3 一些典型例子 21
4.4 子流形的曲率 22
4.5 第二 Bianchi 恒等式与 Shur 定理 23
4.6 Ricci 恒等式 25

第 5 章 测地线 **28**

5.1 测地线的定义 28
5.2 指数映射 31
5.3 完备性 34

第 6 章 Jacobi 场及其应用 **37**

6.1 Jacobi 场 37

6.2 Jacobi 场的应用 40
6.2.1 Cartan–Hadamard 定理 40
6.2.2 法坐标系 (正规坐标系) 40
6.2.3 单连通空间形式的唯一性 42

第 7 章 二次变分公式及其应用 **45**
7.1 二次变分公式 45
7.2 二次变分公式的应用 46

第 8 章 Rauch 比较定理 **48**
8.1 Rauch 比较定理 48
8.2 Rauch 比较定理的应用 52

第 9 章 Hessian 比较定理 **54**
9.1 距离函数的基本性质 54
9.2 Hessian 比较定理 55
9.3 Hessian 比较定理的应用 57

第 10 章 Laplacian 比较定理、体积比较定理 **60**
10.1 Laplacian 比较定理 60
10.2 体积比较定理 63

第 11 章 Hodge 理论 **67**
11.1 de Rham 上同调 67
11.2 调和微分形式和 Hodge 定理 67
11.3 Hodge 定理的应用 70
11.3.1 调和 1-形式 70
11.3.2 3 维流形上的场论 71
11.3.3 Laplace 方程 72
11.3.4 Bochner 技巧 72

第 1 章 黎曼流形

1.1 黎曼流形的定义

定义 1.1

我们称 (M, g) 是一个黎曼流形, 若 M 是一个微分流形, $g \in \Gamma(\otimes^{0,2}TM)$ 满足

1. 对称性: $g(X, Y) = g(Y, X)$, $\forall\, X, Y \in T_pM$.
2. 正定性: $g(X, X) \geqslant 0$, $\forall\, X \in T_pM$, 且等号成立当且仅当 $X = 0$.

我们称 g 是 M 上的一个黎曼度量. ♣

在局部坐标系下, 我们记 $g = g_{ij}dx^i \otimes dx^j$, 其中 $g_{ij}(p) = g\left(\left.\frac{\partial}{\partial x^i}\right|_p, \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p\right)$. 引入记号

$$dx^i dx^j = \frac{1}{2}\left(dx^i \otimes dx^j + dx^j \otimes dx^i\right), \qquad \left(dx^i\right)^2 = dx^i dx^i.$$

则 $g = g_{ij}dx^i dx^j$. $g(X, Y)$ 也可记作 $\langle X, Y\rangle_g$. 在不需要强调度量时, 也可以记作 $\langle X, Y\rangle$.

有了黎曼度量 g, 对于任意 $p \in M$, 可以计算 T_pM 中向量的长度, 以及两个向量之间的夹角.

曲线长度: 设 $\sigma : [a, b] \to M^n$ 为 C^1 曲线, 则定义 σ 关于 g 的长度为:

$$L(\sigma) = \int_a^b \sqrt{g(\sigma'(t), \sigma'(t))}\, dt.$$

对于分段 C^1 曲线, 分段计算长度再相加即可.

体积: 若 M^n 可定向, 选择一个定向相容坐标覆盖 $\{(U_\alpha, \phi_\alpha)\}_{\alpha\in\Gamma}$, 局部地定义一个 n 次微分形式:

$$dV_g = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

可以验证, dV_g 与局部坐标系的选取无关, 故是一个整体的量, 称为**体积形式**. 设 $\Omega \subset M^n$ 为紧集, 则

$$\mathrm{Vol}(\Omega) = \int_\Omega dV_g.$$

距离: 该如何定义距离呢? 配备距离函数的黎曼流形能否构成一个度量空间? 若能的话, 关于度量的拓扑跟流形本身的拓扑一致么?

1.2 黎曼度量的存在性

黎曼度量的存在性无障碍, 性质有障碍.

定理 1.1

任意微分流形上都存在黎曼度量. ♡

证明 找一个局部有限的可数坐标覆盖 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$. 由单位分解, 存在 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in\mathbb{N}}$, $f_\alpha \in C^\infty(M)$, 使得 $\mathrm{supp} f_\alpha \subset U_\alpha$, $\mathrm{supp} f_\alpha$ 局部有限, $0 \leqslant f_\alpha \leqslant 1$, $\sum_{\alpha\in\mathbb{N}} f_\alpha \equiv 1$. 在 U_α 上, 取 $\tilde{g}_\alpha = \sum_{j=1}^n \left(dx_\alpha^j\right)^2$,

定义 $g_\alpha \in \Gamma(\otimes^{0,2}TM)$:

$$g_\alpha(p) = \begin{cases} f_\alpha(p)\widetilde{g}_\alpha(p), & p \in U_\alpha, \\ 0, & p \notin U_\alpha. \end{cases}$$

再令 $g = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}} g_\alpha$. 则 g 是良定的, 并且对称性和光滑性显然.

下证 g 的正定性. 对 $\forall p \in M$, 存在 $\alpha \in \mathbb{N}$, 使得 $f_\alpha(p) > 0$. 从而 $p \in \mathrm{supp} f_\alpha \subset U_\alpha$. 对于 $\forall X_p \in T_pM$, 有

$$g(X_p, X_p) \geqslant f_\alpha(p)\widetilde{g}_\alpha(X_p, X_p) \geqslant 0.$$

等号成立当且仅当 $\tilde{g}_\alpha(X_p, X_p) = 0$, 也当且仅当 $X_p = 0$. □

1.3 黎曼流形的构造方法

例 1.1 乘积黎曼流形 $(M, g) \times (N, h) = (M \times N, g + h)$.

例 1.2 子流形 考虑浸入 $f : M \to (N, h)$. 定义

$$f^*h(X, Y) = h_{f(p)}(f_*(X), f_*(Y)), \forall X, Y \in T_pM,$$

则 f^*h 是 M 上的黎曼度量.

证明 光滑性与对称性显然, 只需验证正定性. 注意到

$$f^*h(X, X) = 0 \Leftrightarrow h_{f(p)}(f_*(X), f_*(X)) = 0 \Leftrightarrow f_*(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$

最后一个等价利用了 f 是浸入. □

1.4 典型例子

考虑 $\mathbb{R}^{n+1}$ 中的超曲面 $f : M^n \to (\mathbb{R}^{n+1}, g_E)$. 在局部坐标系 (U, u^i) 下,

$$f(u^1, \cdots, u^n) = \left(f^1(u^1, \cdots, u^n), \cdots, f^{n+1}(u^1, \cdots, u^n)\right).$$

计算可得

$$\begin{aligned} f^*(g_E)\big|_U &= \sum_{i=1}^{n+1} df^i \otimes df^i \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \left(\frac{\partial f^i}{\partial u^s} du^s\right) \otimes \left(\frac{\partial f^i}{\partial u^t} du^t\right) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\partial f^i}{\partial u^s} \cdot \frac{\partial f^i}{\partial u^t}\right) du^s \otimes du^t. \end{aligned}$$

例 1.3 (图流形) 令 $M = \mathbb{R}^n$, $f(x) = (x, b(x))$. 计算可得

$$h = f^*g_E = \left(\delta_{ij} + \frac{\partial b}{\partial x^i}\frac{\partial b}{\partial x^j}\right) dx^i dx^j,$$

即 $(h_{ij})_{n\times n} = I_n + (Db)^T \cdot Db$. 计算可得 h 的体积形式为

$$dV_h = \sqrt{1 + |Db|^2}\, dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n.$$

例 1.4 (球面) 考虑球面到欧氏空间的嵌入 $\mathrm{S}^n(a) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = a\} \overset{i}{\hookrightarrow} (\mathbb{R}^{n+1}, g_E)$ $(a > 0)$. 设 $N = (0, \cdots, 0, a)$, $S = (0, \cdots, 0, -a)$, $U_+ = \mathrm{S}^n(a) \setminus S$, $U_- = \mathrm{S}^n(a) \setminus N$. $\varphi_\pm : U_\pm \to \mathbb{R}^n$ 满足

$$(\xi^1, \cdots, \xi^n) = \varphi_+(x^1, \cdots, x^{n+1}) = \left(\frac{ax^1}{a + x^{n+1}}, \cdots, \frac{ax^n}{a + x^{n+1}}\right),$$

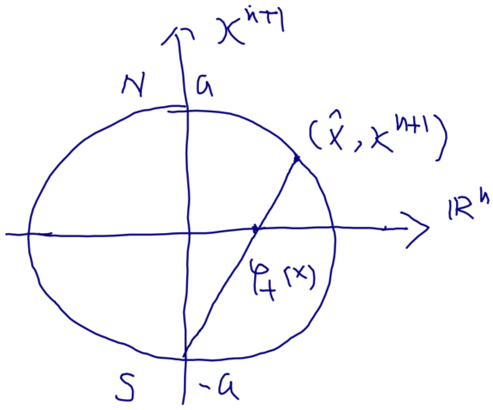
$$(\eta^1, \cdots, \eta^n) = \varphi_-(x^1, \cdots, x^{n+1}) = \left(\frac{ax^1}{a - x^{n+1}}, \cdots, \frac{ax^n}{a - x^{n+1}}\right).$$

注意到

$$|\xi|^2 = \frac{a^2(a^2 - (x^{n+1})^2)}{(a + x^{n+1})^2} = \frac{a^2(a - x^{n+1})}{a + x^{n+1}},$$

于是 $x^{n+1} = \dfrac{a(a^2 - |\xi|^2)}{a^2 + |\xi|^2}$, $\hat{x} = \dfrac{2a^2}{a^2 + |\xi|^2}\xi$, 其中 $\hat{x}$ 表示 $(x^1, \cdots, x^n)$. 因此,

$$i^* g_E|_{U_+} = \frac{4a^4}{(a^2 + |\xi|^2)^2} \sum_{i=1}^{n} \left(d\xi^i\right)^2.$$



例 1.5 (双曲空间) 考虑 $(\mathbb{R}^{n+1}, L)$, 其中 $L = \sum_{i=1}^{n}(dx^i)^2 - (dx^{n+1})^2$. 双曲空间

$$\mathbb{H}^n(a) = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \langle x, x\rangle_L = -a^2, x^{n+1} > 0\}$$

微分同胚于 $\mathbb{R}^n$. 因为 $x^{n+1} = \sqrt{|\hat{x}|^2 + a^2}$, 所以

$$i^* L = \sum_{i,j} \left(\delta_{ij} - \frac{x^i x^j}{|\hat{x}|^2 + a^2}\right) dx^i dx^j.$$

因为 $\xi = \dfrac{a\hat{x}}{a + x^{n+1}}$, $\hat{x} = \dfrac{2a^2\xi}{a^2 - |\xi|^2}$, 所以

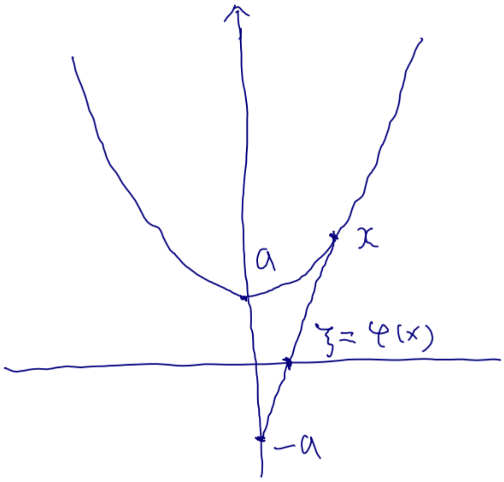
$$\varphi^* i^*(L) = \frac{4a^4}{(a^2 - |\xi|^2)^2} \sum_{i=1}^{n} \left(d\xi^i\right)^2.$$

1.5 等距

定义 1.2

考虑映射 $f : (M, g) \to (N, h)$. 若 $g = f^* h$, 则称 f 为**等距映射**. 若 f 为微分同胚, 则称 f 为**等距同构**, 此时, 在黎曼几何的范畴内, 视 M 和 N 为相同对象. ♣

注 等距映射必为浸入, 因为 $f_*(X) = 0$ 蕴涵 $g(X, X) = h(f_*(X), f_*(X)) = 0$.



定义 1.3

考虑微分自同胚 $f:(M,g)\to(M,h)$. 若 $h=\lambda^2 f^*g$, 其中 $\lambda\in C^\infty(M)$ 且 $\lambda>0$, 则称 f 为共形变换. ♣

1.6 双曲空间不同模型间的等距

双曲空间主要有以下三种模型:

1. Hyperboloid,
2. Poincaré ball,
3. Upper half plane.

练习 1.1 考虑映射 $f:\mathbb{H}\to\mathbb{D}$, $f(z)=\dfrac{z-i}{z+i}$, 可以得到二维上半平面到 Poincaré 圆盘的等距. 高维的情况呢?

第 2 章 黎曼联络

2.1 流形上的高阶求导问题

思考: 考虑 $f \in C^\infty(M)$, 一阶导数有 $df, \nabla_g f$, 其中 $\nabla_g f$ 定义为: $\langle X, \nabla_g f\rangle = Xf, \forall X \in \Gamma(TM)$. 二阶导数呢? 如何继续对 $df, \nabla f$ 求导?

外微分? $d(df) = 0$.

Lie 导数? $[X, \nabla f]$ 关于 X 不是函数线性的, 依赖于 X 的一阶导. $X(p) = X'(p), DX(p) \neq DX'(p)$, 则 $[X, \nabla f](p) \neq [X', \nabla f](p)$.

在 $\mathbb{R}^n$ 中, $D_X Y$ 只需要 X 在一点有定义, 换言之, ∇Y 为 $(1,1)$ 型张量. 流形上如何对向量场求导? 对于欧氏空间, 有

$$f_{ij}(x) = \lim_{t\to 0} \frac{f_i(x+te_j) - f_i(x)}{t}.$$

而对于流形, $\nabla f(x) \in T_x M, \nabla f(y) \in T_y M, \nabla f(x) - \nabla f(y)$ 有意义么?

不在同一个切空间中, 不能直接相减. 需要在 $T_x M$ 与 $T_y M$ 中建立同构, 需要一个附加的结构来实现: 联络.

2.2 仿射联络

对于向量丛和主丛, 都有联络的概念, 仿射联络是指切丛的联络.

定义 2.1

微分流形 M 的**仿射联络**是指一个映射 $\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$, 对于任意 $f \in C^\infty(M), \lambda \in \mathbb{R}$, 满足

(1) $\nabla_{Y+fZ} X = \nabla_Y X + f\nabla_Z X$,

(2) $\nabla_Y (X + \lambda Z) = \nabla_Y X + \lambda \nabla_Y Z$,

(3) $\nabla_Y (fX) = Y(f)X + f\nabla_Y X$.

称 (M, ∇) 为一个仿射联络空间.

注 $\nabla_{(\cdot)} X$ 满足张量性质. 我们称 $\nabla_X Y$ 是向量场 Y 沿 X 方向的**协变导数. 联络也常用符号** D **表示.**

命题 2.1 (仿射联络的基本性质)

(1) 若 ∇^1 和 ∇^2 是联络, 对于 $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ 满足 $\lambda + \mu = 1$, $\lambda\nabla^1 + \mu\nabla^2$ 仍是联络.

(2) 联络不是张量场, 但联络之差是.

证明 注意到

$$\nabla^1_X (fY) - \nabla^2_X (fY) = f\nabla^1_X Y + (Xf)Y - f\nabla^2_X Y - (Xf)Y = f\left(\nabla^1_X Y - \nabla^2_X Y\right).$$

命题 2.2 (仿射联络的局部性)

设 (M, D) 是仿射联络空间, $X, Y, \widetilde{X}, \widetilde{Y} \in \Gamma(TM)$, U 为 M 的非空子集, 且 $X|_U = \widetilde{X}|_U$, $Y|_U = \widetilde{Y}|_U$, 则 $(D_X Y)|_U = (D_{\widetilde{X}} \widetilde{Y})|_U$.

证明 考虑局部坐标系 $\{U, x^i\}$, 设 $D_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial k^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}$, 其中 Γ_{ij}^k 是**联络系数**. 对 $X|_U = X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y|_U = Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, 计算可得

$$(D_X Y)\big|_U = X^i \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x^i} + Y^k \Gamma_{ik}^j \right) \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

注 设 $\sigma(t)$ 是 M 中的曲线, $\sigma'(0) = X$, 则 $(D_X Y)|_U$ 只与 Y 沿着 $\sigma(t)$ 的值有关.

考虑局部坐标系 $\{U, x^i\}$, $\{\widetilde{U}, \widetilde{x}^j\}$, 我们还可以得到坐标变换公式

$$\Gamma_{ij}^k \frac{\partial \widetilde{x}^r}{\partial x^k} = \widetilde{\Gamma}_{pq}^r \frac{\partial \widetilde{x}^p}{\partial x^i} \frac{\partial \widetilde{x}^q}{\partial x^j} + \frac{\partial^2 \widetilde{x}^r}{\partial x^i \partial x^j}.$$

从上式也能看出联络不是张量场, 但两个联络之差是张量场.

2.3 Hessian 与挠率

$Y(Xf)$ 关于 X 不是张量性质的, 因为 $Y(hX(f)) = hY(Xf) + Yh \cdot Xf$. 考虑

$$\nabla_{X,Y}^2 f = Y(Xf) - (\nabla_Y X) f,$$

有

$$\begin{aligned}
\nabla_{hX,Y}^2 f &= Y((hX)f) - (\nabla_Y (hX)) f \\
&= hY(Xf) + (Yh)(Xf) - h \cdot (\nabla_Y X) f - (Yh)(Xf) \\
&= h \nabla_{X,Y}^2 f.
\end{aligned}$$

因此 $\nabla_{X,Y}^2 f$ 关于 X 和 Y 都是张量性质, $\nabla^2 f$ 为 $(0,2)$ 张量场, 称为 f 关于联络 ∇ 的 Hessian. $\nabla^2 f$ 是否对称?

$$\begin{aligned}
\nabla_{X,Y}^2 f - \nabla_{Y,X}^2 f &= Y(Xf) - (\nabla_Y X) f - X(Yf) + (\nabla_X Y) f \\
&= (\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]) f.
\end{aligned}$$

挠率: $T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$. 挠率 T 是 $(1,2)$ 型张量场.

$$\begin{aligned}
T(X, fY) &= \nabla_X (fY) - \nabla_{fY} X - [X, fY] \\
&= f \nabla_X Y + (Xf) Y - f \nabla_Y X - (f[X,Y] + (Xf)Y) \\
&= f T(X,Y).
\end{aligned}$$

挠率为零的联络称为**无挠联络**. 在局部坐标系下,

$$T\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \right) = \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k},$$

于是

$$T = \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \right) \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^i \otimes dx^j.$$

无挠 $\Leftrightarrow$ 联络系数关于下指标对称.

2.4 对张量场求协变导数

如何将对向量场的求导推广到对张量场? 首先要满足一些合理的条件:

(1) 保持类型: 若 τ 为 (r,s) 型张量场, 则 $\nabla_X \tau$ 仍为 (r,s) 型张量场, 即 $\nabla_{(\cdot)} \tau$ 为 $(r, s+1)$ 型张量场. $f \in C^\infty(M)$, $\nabla_X f \triangleq Xf$.

(2) Leibniz 法则: $\nabla_X(K\otimes L)=(\nabla_X K)\otimes L+K\otimes(\nabla_X L)$.

(3) 与缩并可交换: 记缩并符号为 $\mathcal{C}$. $\mathcal{C}:\Gamma(\otimes^{r,s}TM)\to\Gamma(\otimes^{r-1,s-1}TM)$ $(r\geq 1, s\geq 1)$ 定义如下: 对于 $\tau\in\Gamma(\otimes^{r,s}TM)$, 选一个局部坐标系,

$$\mathcal{C}(\tau)\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1};X_1,\cdots,X_{s-1}\right)=\sum_{i=1}^{n}\tau\left(dx^i,\alpha_1,\cdots,\alpha_{r-1};\frac{\partial}{\partial x^i},X_1,\cdots,X_{s-1}\right).$$

其中, α_i 为任意微分式, X_j 为任意向量场. 特别地, 设 $Y\in\Gamma(TM),\alpha\in\Gamma(T^*M)=\Omega^1(M)$, 则

$$\mathcal{C}(Y\otimes\alpha)=\alpha(Y).$$

缩并运算即是求迹, 缩并运算与局部坐标系的选取无关 (线性变换的迹与基底选取无关). 缩并默认是对第一个逆变指标和第一个协变指标, 也可以指定位置.

这三条要求决定了对张量场的求导运算. 先看对余切向量场:

$$\begin{aligned}X(\alpha(Y))&=\nabla_X\left(\mathcal{C}(Y\otimes\alpha)\right)=\mathcal{C}\left(\nabla_X(Y\otimes\alpha)\right)\\&=\mathcal{C}\left((\nabla_X Y)\otimes\alpha\right)+\mathcal{C}\left(Y\otimes(\nabla_X\alpha)\right)\\&=\alpha(\nabla_X Y)+(\nabla_X\alpha)(Y).\end{aligned}$$

所以,

$$(\nabla_X\alpha)(Y)=X(\alpha(Y))-\alpha(\nabla_X Y).$$

在局部坐标系下,

$$\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}dx^k\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\frac{\partial}{\partial x^i}\left(dx^k\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)-dx^k\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=-dx^k\left(\Gamma_{ij}^s\frac{\partial}{\partial x^s}\right)=-\Gamma_{ij}^k.$$

因此,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}dx^k=-\Gamma_{ij}^k dx^j.$$

再看 Hessian: $f\in C^\infty(M)$, $\nabla df\in\Gamma\left(\otimes^{0,2}TM\right)$, 有

$$\nabla df(X,Y)=Y\left(df(X)\right)-df(\nabla_Y X)=Y(Xf)-(\nabla_Y X)f.$$

即 $\nabla df=\nabla^2 f$.

更一般地, 对于 M 上的 (r,s) 型张量场 τ, 有

$$\begin{aligned}(\nabla_X\tau)\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_r;Y_1,\cdots,Y_s\right)=&X\left(\tau\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_r;Y_1,\cdots,Y_s\right)\right)\\&-\sum_{i=1}^{r}\tau\left(\alpha_1,\cdots,\nabla_X\alpha_i,\cdots,\alpha_r;Y_1,\cdots,Y_s\right)\\&-\sum_{j=1}^{s}\tau\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_r;Y_1,\cdots,\nabla_X Y_j,\cdots,Y_s\right),\end{aligned}$$

在局部坐标系下,

$$\tau|_U=\tau_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s},$$

记

$$\nabla\tau|_U=\tau_{j_1\cdots j_s,j_{s+1}}^{i_1\cdots i_r}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}\otimes dx^{j_{s+1}},$$

则

$$\tau_{j_1\cdots j_s,j_{s+1}}^{i_1\cdots i_r}=\frac{\partial\tau_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}}{\partial x^{j_{s+1}}}+\sum_{a=1}^{r}\tau_{j_1\cdots j_s}^{i_1\cdots i_{a-1}ki_{a+1}\cdots i_r}\Gamma_{j_{s+1}k}^{i_a}-\sum_{b=1}^{s}\tau_{j_1\cdots j_{b-1}lj_{b+1}\cdots j_s}^{i_1\cdots i_r}\Gamma_{j_{s+1}j_b}^{l}.$$

对向量场求二阶导数: $\nabla X \in \Gamma(\otimes^{1,1}TM)$, $\nabla^2 X \in \Gamma(\otimes^{1,2}TM)$.

$$\nabla X(\alpha, Y) = \alpha(\nabla_Y X).$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 X(\alpha, Y, Z) &= Z\alpha(\nabla_Y X) - (\nabla_Z \alpha)(\nabla_Y X) - \alpha(\nabla_{\nabla_Z Y} X)\\ &= Z\alpha(\nabla_Y X) - (Z\alpha(\nabla_Y X) - \alpha(\nabla_Z \nabla_Y X)) - \alpha(\nabla_{\nabla_Z Y} X)\\ &= \alpha\left(\nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{\nabla_Z Y} X\right).\end{aligned}$$

$$\nabla^2_{Y,Z} X = \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{\nabla_Z Y} X.$$

$\nabla^2 X$ 是否对称? 若联络无挠, 有

$$\begin{aligned}\nabla^2_{Y,Z} X - \nabla^2_{Z,Y} X &= \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_{[Z,Y]} X\\ &\triangleq [\nabla_Z, \nabla_Y] X - \nabla_{[Z,Y]} X.\end{aligned}$$

注 再看矩阵乘法：设 A, B 是 $(1,1)$ 张量, 表示为

$$A = a^i_j \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^j, \quad B = b^k_l \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^l.$$

有

$$A \otimes B = a^i_j b^k_l \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes \frac{\partial}{\partial x^k} \otimes dx^j \otimes dx^l.$$

将 $A \otimes B$ 关于反变第二个位置和协变第一个位置缩并, 可得

$$\mathcal{C}^2_1(A \otimes B) = a^i_k b^k_l \frac{\partial}{\partial x^i} \otimes dx^l.$$

A, B 也可以看成是矩阵, 表示为 $A = (a^i_j)_{n\times n}$, $B = (b^k_l)_{n\times n}$. 因此可以看作

$$A \cdot B = \mathcal{C}^2_1(A \otimes B).$$

即**矩阵乘法可以看成张量积和缩并的复合**.

2.5 黎曼联络

设 (M, g) 为黎曼流形, ∇ 为 M 的一个仿射联络, 则 ∇g 为 $(0,3)$ 型张量场. 对于任意向量场 X, Y 和 Z, 有:

$$(\nabla_Z g)(X, Y) = Zg(X, Y) - g(\nabla_Z X, Y) - g(X, \nabla_Z Y).$$

若 $\nabla g \equiv 0$, 则称联络 ∇ 与 g **相容**.

定理 2.1 (黎曼几何基本定理)

M 上存在唯一一个与 g 相容的无挠联络, 称为 (M, g) 的**黎曼联络**, 或 **Levi-Civita 联络**. ♡

证明 先证唯一性. 设 ∇ 为与 g 相容的无挠联络, 由相容性, 可得:

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \tag{2.1}$$

$$Y\langle Z, X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle, \tag{2.2}$$

$$Z\langle X, Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle, \tag{2.3}$$

由无挠性, 可得:

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y], \tag{2.4}$$

$$\nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y, Z], \tag{2.5}$$

$$\nabla_Z X - \nabla_X Z = [Z, X]. \tag{2.6}$$

用(2.1)+(2.2)-(2.3), 再利用(2.4), (2.5)和(2.6), 可得

$$X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle = 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle - \langle [X, Y], Z\rangle + \langle Y, [X, Z]\rangle + \langle X, [Y, Z]\rangle. \tag{2.7}$$

因此, (2.7)可以唯一决定 $\nabla_X Y$. 而可以验证, 按(2.7)所定义的确是联络 (自行验证). (2.7)被称为 **Koszul** 公式.

在局部坐标系下, $g = g_{ij} dx^i dx^j$, 黎曼联络 ∇ 可以表示为

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}.$$

其中的联络系数 Γ_{ij}^k 被称为 Christoffel 符号. 根据 Koszul 公式可得,

$$2\Gamma_{ij}^m g_{ml} = \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l},$$

即

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{li}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l} \right).$$

定理 2.2 (等距保持黎曼联络)

设 ∇ 和 $\tilde{\nabla}$ 分别是黎曼流形 (M, g) 和 $(\tilde{M}, \tilde{g})$ 的黎曼联络. 设 $\varphi: M \to \tilde{M}$ 是等距, $p \in M$, $\tilde{p} = \varphi(p)$, 则对 $\forall v \in T_p M$, 以及 $\forall X \in \Gamma(TM)$, 有

$$\varphi_* (\nabla_v X) = \tilde{\nabla}_{\varphi_*(v)} \varphi_*(X).$$

♡

练习 2.1 证明定理2.2.

2.6 黎曼子流形的诱导联络

设 $(\bar{M}, \bar{g})$ 是黎曼流形, M 是 $\bar{M}$ 的嵌入子流形, 包含映射用 i 表示. $\bar{M}$ 诱导了 M 的黎曼度量 $g = i^* \bar{g}$, 也诱导了 M 的一个联络 $\nabla = \bar{\nabla}^\top$: 对于 $X, Y \in \Gamma(TM)$, 定义 $\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\top$, 其中 $\bar{X}, \bar{Y}$ 分别表示将 X 和 Y 以任意方式延拓成的 $\bar{M}$ 上的向量场, "$\top$" 表示向 M 的切向做投影. $\nabla_X Y$ 的取值与延拓方式无关.

命题 2.3 (诱导联络继承无挠性)

若 $\bar{\nabla}$ 无挠, 则 ∇ 也无挠.

♠

证明

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = \left(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{X}\right)^\top = [\bar{X}, \bar{Y}]^\top = [X, Y].$$

两者相容么? 答案是肯定的.

命题 2.4 (子流形继承的联络和度量相容)

度量 $g = i^* \bar{g}$ 和联络 $\nabla = \bar{\nabla}^\top$ 相容.

♠

证明 只需验证 Koszul 公式. 对 $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$, 有

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y,Z) &= \bar g(\nabla_X Y,Z)=\bar g(\overline{\nabla}_X Y,Z)\\ &=\frac12\left(X\bar g(Y,Z)+Y\bar g(Z,X)-Z\bar g(X,Y)+\bar g([X,Y],Z)-\bar g(Y,[X,Z])-\bar g(X,[Y,Z])\right)\\ &=\frac12\left(Xg(Y,Z)+Yg(Z,X)-Zg(X,Y)+g([X,Y],Z)-g(Y,[X,Z])-g(X,[Y,Z])\right).\end{aligned}$$

定义 2.2 (第二基本形式)

设 $(\bar M,\bar g)$ 是黎曼流形, M 是 $\bar M$ 的嵌入子流形. 定义 M 在 $\bar M$ 中的第二基本形式为

$$\mathrm{II}(X,Y)=\left(\bar\nabla_X Y\right)^{\perp}=\bar\nabla_X Y-\left(\bar\nabla_X Y\right)^{\top},$$

其中, $X,Y\in\Gamma(TM)$.

♣

验证: $\mathrm{II}(X,Y)$ 关于 X,Y 是函数线性的, 且是对称的.

若 M 是 $\bar M$ 的超曲面, 且法丛平凡, 则可以取一个单位法向量场 ν. 有

$$\mathrm{II}(X,Y)=\left\langle\bar\nabla_X Y,\nu\right\rangle\nu.$$

令 $\mathrm{II}_\nu(X,Y)=\left\langle\bar\nabla_X Y,\nu\right\rangle$, 则 $\mathrm{II}_\nu\in\Gamma\left(\otimes^{0,2}TM\right)$. 令 $\mathcal{A}_\nu(X)=\bar\nabla_X\nu$, 验证: $\mathcal{A}_\nu\in\Gamma\left(\otimes^{1,1}TM\right)$, $\langle\mathcal{A}_\nu(X),Y\rangle=-\mathrm{II}_\nu(X,Y)$. $\mathcal{A}_\nu$ 称为**形状算子**.

2.7 黎曼流形上的代数和微分算子

设 (M,g) 为黎曼流形, ∇ 为相应的黎曼联络.

2.7.1 升降调算子

降调算子$\flat:\Gamma(TM)\to\Gamma(T^*M)$ 定义为:

$$X\to X^\flat,\quad X^\flat(Y)=\langle X,Y\rangle,\quad \forall Y\in\Gamma(TM).$$

局部坐标系下, 设 $X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}$, 则

$$X^\flat=\left(g_{ij}X^j\right)dx^i.$$

升调算子$\sharp:\Gamma(T^*M)\to\Gamma(TM)$ 定义为:

$$\alpha\to\alpha^\sharp,\quad \left\langle\alpha^\sharp,Y\right\rangle=\alpha(Y),\quad \forall Y\in\Gamma(TM).$$

局部坐标系下, 设 $\alpha=a_i dx^i$, 则

$$\alpha^\sharp=\left(g^{ij}a_j\right)\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

易见, $(X^\flat)^\sharp=X$, $(\alpha^\sharp)^\flat=\alpha$.

对于一般的张量场, 也可定义升降调算子, 设 τ 是 (r,s) 型张量场, $\tau^{\sharp_{k,l}}$ 是 $(r+1,s-1)$ 型张量场, 定义为

$$\tau^{\sharp_{k,l}}(\alpha_1,\cdots,\alpha_{r+1};X_1,\cdots,X_{s-1})=\tau\left(\alpha_1,\cdots,\alpha_{k-1},\alpha_{k+1},\cdots,\alpha_{r+1};X_1,\cdots,X_{l-1},\alpha_k^\sharp,X_l,\cdots,X_{s-1}\right).$$

例子:

$$g^{\sharp_{1,1}}=id,\quad (id)^{\sharp_{2,1}}=g^{-1}.$$

局部坐标系下,

$$id=\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^i,\quad g^{-1}=g^{ij}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

其中, $(g^{ij})=(g_{ij})^{-1}$.

再看一个例子: 设 S 为 2 阶协变张量场, 局部坐标系下, 设

$$S=S_{ij}dx^i\otimes dx^j,$$

则

$$S^{\sharp_{1,1}}=g^{ik}S_{kj}\frac{\partial}{\partial x^i}\otimes dx^j.$$

2.7.2 取迹和范数

设 S 为 2 阶协变张量场, **关于 g 取迹**是如下运算:

$$\mathrm{tr}S=\mathcal{C}\left(S^{\sharp_{1,1}}\right)=\mathcal{C}(\mathcal{C}(g^{-1}\otimes S)).$$

在局部坐标系下, 设 $S=S_{ij}dx^i\otimes dx^j$, 则

$$\mathrm{tr}S=g^{ij}S_{ij}.$$

选一组标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^n$, 对偶基记为 $\{e_i^*\}_{i=1}^n$, 还有表达式

$$\mathrm{tr}S=\sum_i S(e_i,e_i).$$

这里用到了 $e_i^*(\cdot)=\langle\cdot,e_i\rangle$.

对于 2 阶以上协变张量, 可以对指定位置进行缩并. 例如, 设 R 是一个四阶张量, 局部坐标系下表达式为

$$R=R_{ijkl}dx^i\otimes dx^j\otimes dx^k\otimes dx^l.$$

则将 R 关于 $1,4$ 位置求迹后得到,

$$\mathrm{tr}_{1,4}R=g^{il}R_{ijkl}\otimes dx^j\otimes dx^k.$$

可以将内积推广到张量上, 设 H,T 同为 (r,s) 阶张量, 在局部坐标下,

$$H=H^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s},$$
$$T=T^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}\frac{\partial}{\partial x^{k_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{k_r}}\otimes dx^{l_1}\otimes\cdots\otimes dx^{l_s}.$$

则

$$\langle H,T\rangle=g^{j_1l_1}\cdots g^{j_sl_s}g_{i_1k_1}\cdots g_{i_rk_r}H^{i_1\cdots i_r}_{j_1\cdots j_s}T^{k_1\cdots k_r}_{l_1\cdots l_s}.$$

H 的**范数**定义为 $|H|=\sqrt{\langle H,H\rangle}$. 问题: $|g|=?$ $|g^{-1}|=?$ $|id|=?$

2.7.3 梯度 (gradient)

设 $f\in C^\infty(M)$. f 的**梯度**∇f 定义为

$$\langle\nabla f,X\rangle\triangleq df(X)=Xf,\quad\forall X\in\Gamma(TM).$$

即 $\nabla f=(df)^\sharp$. 在局部坐标系下,

$$\nabla f=g^{ij}\frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial x^j}.\tag{2.8}$$

$$|\nabla f|^2=g^{ij}f_if_j.$$

2.7.4 散度 (divergence)

设 τ 是 (r,s) 型张量场, 则 $\nabla\tau$ 是 $(r,s+1)$ 型张量场, $\mathcal{C}(\nabla\tau)$ 是 $(r-1,s)$ 型张量场. 定义**散度算子**$\operatorname{div}(\tau)=\mathcal{C}(\nabla\tau)$. 对于向量场 X, 选坐标基底, 有

$$\operatorname{div} X = dx^i\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}X\right)=\frac{\partial X^i}{\partial x^i}+X^k\Gamma^i_{ik}.$$

注意

$$\Gamma^i_{ik}=\frac{1}{2}g^{il}\frac{\partial g_{li}}{\partial x^k}=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x^k}.$$

其中 $G=\det(g_{ij})$. 因此,

$$\operatorname{div} X=\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial x^k}\left(\sqrt{G}X^k\right). \tag{2.9}$$

选一组标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^n$, 对偶基记为 $\{e_i^*\}_{i=1}^n$. 有表达式

$$\operatorname{div} X=\sum_i e_i^*\left(\nabla_{e_i}X\right)=\sum_i\langle\nabla_{e_i}X,e_i\rangle.$$

这里用到了 $e_i^*(\cdot)=\langle\cdot,e_i\rangle$.

2.7.5 Hessian 和 Laplacian

Hessian 的其他表达式:

$$\begin{aligned}\nabla^2 f(X,Y)&=Y\left(Xf\right)-\left(\nabla_Y X\right)f\\&=Y\left\langle X,\nabla f\right\rangle-\left\langle\nabla_Y X,\nabla f\right\rangle\\&=\left\langle X,\nabla_Y\nabla f\right\rangle.\end{aligned}$$

局部坐标系下,

$$\nabla^2 f=f_{ij}dx^i\otimes dx^j,$$

其中

$$f_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}-\Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

Laplacian: $\Delta f\triangleq\operatorname{tr}(\nabla^2 f)$. 选一组标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^n$, 可见

$$\Delta f=\sum_i\nabla^2 f(e_i,e_i)=\sum_i\langle\nabla_{e_i}\nabla f,e_i\rangle=\operatorname{div}\left(\nabla f\right).$$

在局部坐标系下,

$$\Delta f=g^{ij}f_{ij}=g^{ij}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}-\Gamma^k_{ij}\frac{\partial f}{\partial x^k}\right).$$

因为

$$\begin{aligned}g^{ij}\Gamma^k_{ij}&=\frac{1}{2}g^{ij}g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i}+\frac{\partial g_{li}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)\\&=\frac{1}{2}g^{ij}\frac{\partial g_{jl}}{\partial x^i}g^{lk}+\frac{1}{2}g^{ji}\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j}g^{lk}-\frac{1}{2}g^{kl}g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\\&=-\frac{1}{2}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^i}-\frac{1}{2}\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^i}-\frac{1}{2}g^{kl}G^{-1}\frac{\partial G}{\partial x^l}\\&=-\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^i}-\frac{1}{2}g^{kl}G^{-1}\frac{\partial G}{\partial x^l},\end{aligned}$$

所以

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial x^k}\left(g^{ik}\sqrt{G}\frac{\partial f}{\partial x^i}\right). \tag{2.10}$$

联合(2.8)和(2.9), 也可得到表达式(2.10).

满足 $\Delta f = 0$ 的函数称为**调和函数**.

2.7.6 散度定理

回忆:

定理 2.3 (Stokes 公式)

设 M 是可定向带边流形, ω 为 M 上紧支的 $n-1$ 次微分形式, 则

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

我们可以得到 Stokes 公式的一种重要的特殊形式:

定理 2.4 (散度定理)

设 (M,g) 是带边黎曼流形, X 为 M 上紧支向量场, ν 为 ∂M 在 M 中的单位外法向量场, 则有

$$\int_M \mathrm{div} X\, dV_g = \int_{\partial M} \langle X,\nu\rangle\, dV_{g|_{\partial M}}.$$

证明 为了记号简便, 令 $\Omega = dV_g$. 在 Stokes 公式中, 取 $\omega = i_X\Omega$. 首先证明 $d(i_X\Omega) = (\mathrm{div}\, X)\Omega$. 由 Cartan 公式,

$$L_X\Omega = d\left(i_X\Omega\right) + i_X\left(d\Omega\right).$$

因为 $d\Omega = 0$, 只需证明 $L_X\Omega = (\mathrm{div}\, X)\Omega$. 在局部坐标下,

$$X = X^i\frac{\partial}{\partial x^i}, \quad \Omega = \sqrt{G}\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

有

$$L_X\Omega = X\sqrt{G}\, dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n + \sqrt{G}\sum_{k=1}^n dx^1\wedge\cdots\wedge L_X\left(dx^k\right)\wedge\cdots\wedge dx^n.$$

$$X\sqrt{G} = X^i\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x^i},$$

利用 L_X 和 d 可交换性,

$$L_X\left(dx^k\right) = d\left(L_X x^k\right) = d\left(X\left(x^k\right)\right) = \frac{\partial X^k}{\partial x^j}dx^j.$$

因此,

$$L_X\Omega = \left(X^i\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial x^i} + \sqrt{G}\frac{\partial X^i}{\partial x^i}\right)dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n = (\mathrm{div}\, X)\,\Omega.$$

下面证明: 限制在 ∂M 上, $i_X\Omega = \langle X,\nu\rangle\, dV_{g|_{\partial M}}$. 在 ∂M 关于诱导度量取一组标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$, 且和定向相容. 这组基和 ν 的对偶基分别记为 $\{e_i^*\}_{i=1}^{n-1}$ 和 ν^*, 有

$$dV_g = \nu^*\wedge e_1^*\wedge\cdots\wedge e_{n-1}^*, \quad dV_{g|_{\partial M}} = e_1^*\wedge\cdots\wedge e_{n-1}^*.$$

将 X 做正交分解

$$X = \langle X, \nu \rangle \nu + \sum_{i=1}^{n-1} \langle X, e_i \rangle e_i,$$

再代入 dV_g 表达式, 并限制在 ∂M 上, 就得到

$$i_X \Omega = \langle X, \nu \rangle e_1^* \wedge \cdots \wedge e_{n-1}^*.$$

推论 2.1

若 M 紧致无边, 则有

$$\int_M \mathrm{div} X \, dV_g = 0.$$

若 $X = \nabla f$, 则有

$$\int_M \Delta f \, dV_M = \int_{\partial M} \langle \nabla f, \nu \rangle \, dV_{\partial M}.$$

练习 2.2 设 $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $M_f = \{(x, f(x)) \mid x \in \mathbb{R}^n\}$. 计算 M_f 的诱导度量、诱导度量的 Christoffel 符号以及 M_f 的第二基本形式.

练习 2.3 计算 $g = e^{2u} g_E$ 的 Christoffel 符号, 其中 $u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, g_E 是欧氏度量.

练习 2.4 证明: $\Delta f^2 = 2f\Delta f + 2|\nabla f|^2$.

练习 2.5 利用练习2.4中的等式及散度定理, 证明: 紧致无边黎曼流形上的调和函数为常数.

第 3 章 平行移动

3.1 向量场的平行移动

定义 3.1

设 (M,D) 是一个 m 维仿射联络空间, $\gamma:[a,b]\to M$ 是一条光滑曲线, $X\in\Gamma(TM)$. 若沿曲线 γ 有 $D_{\dot\gamma(t)}X=0,\forall t\in[a,b]$, 则称向量场 X 沿曲线 γ **是平行的**.

注 由于联络具有局部性, $D_{\dot\gamma}(t)X$ 仅与 X 在 γ 上的值有关.

在局部坐标系下, 不妨设

$$\dot\gamma(t)=Y^j(t)\frac{\partial}{\partial x^j},\quad X=X^i\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

计算可得

$$\begin{aligned}D_{\dot\gamma(t)}X&=Y^j\left(\frac{\partial X^i}{\partial x^j}+X^k\Gamma^i_{jk}\right)\frac{\partial}{\partial x^i}\\&=\left(\dot\gamma(t)X^i\right)\frac{\partial}{\partial x^i}+Y^jX^k\Gamma^i_{jk}\frac{\partial}{\partial x^i}\\&=\frac{dX^i(\gamma(t))}{dt}\frac{\partial}{\partial x^i}+Y^jX^k\Gamma^i_{jk}\frac{\partial}{\partial x^i}.\end{aligned}$$

于是得到线性 ODE system:

$$\begin{cases}\dfrac{dX^i(t)}{dt}+Y^j(t)\Gamma^i_{jk}(t)X^k(t)=0,\quad 1\leqslant i\leqslant m,\\ X^i(0)=X^i(\gamma(a)).\end{cases}$$

定义 3.2

设 $\gamma:[a,b]\to M$ 是连续曲线. 若存在 $[a,b]$ 的一个分划 $a=t_0<t_1<\cdots<t_{r-1}<t_r=b$, 使得 $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ 为光滑曲线, 则称 γ 为 M 上的**分段光滑曲线**. 相应地, 若向量场 X 在每段 $\gamma|_{[t_{i-1},t_i]}$ 上平行, 则称 X 为**分段光滑平行向量场**.

定理 3.1

设 (M,D) 为仿射联络空间, $p\in M$, $\gamma:[0,b]\to M$ 是从 p 出发的分段光滑曲线, 则对 $\forall X_0\in T_pM$, 存在唯一一个沿 γ 的分段光滑平行向量场 $X=X(t)$ 满足 $X(0)=X_0$.

证明 分段解 ODE 初值问题, 注意上一段末值 = 下一段初值.

线性方程组关于初值线性, 分段光滑平行向量场构成一个线性空间, 与 T_pM 同构. 特别地,

定义 3.3

对 $\forall t\in[0,b]$, 沿 γ 的分段平行向量场给出了 $T_pM\to T_{\gamma(t)}M$ 的线性同构, 称为曲线 γ 从 $\gamma(0)$ 到 $\gamma(t)$ 的**平行移动**, 表示为 $X(t)=\mathcal{P}_0^t(X_0)$.

3.2 平行移动与协变导数

命题 3.1

设 (M,D) 为仿射联络空间, $\gamma:[a,b]\to M$ 是光滑曲线, X 是沿 γ 的向量场. 则

$$D_{\dot\gamma(t)}X=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathcal{P}^t_{t+\Delta t}(X\circ\gamma(t+\Delta t))-X\circ(\gamma(t))}{\Delta t}.$$

证明 记 $p=\gamma(0)$. 在 T_pM 中取一组基底 $\{e_i\}$, 令 $e_i(t)=P^t_0(e_i)$, 则 $e_i(0)=e_i$, 且 $e_i(t)$ 是沿 γ 的平行向量场, 即有 $D_{\dot\gamma(t)}e_i(t)\equiv 0$. 由于 $\mathcal{P}^t_0:T_pM\to T_{\gamma(t)}M$ 是线性同构, $\{e_i(t)\}$ 是 $T_{\gamma(t)}M$ 的一组基. 于是, X 在 γ 上的限制可以表示为

$$X(\gamma(t))=\sum_{i=1}^m X^i(t)e_i(t),$$

其中 $X^i(t)$ 是 t 的光滑函数. 所以

$$D_{\dot\gamma(t)}X(\gamma(t))=\dot\gamma(t)\left(X^i(t)\right)e_i(t)+X^i(t)D_{\dot\gamma(t)}e_i(t)=\frac{dX^i(t)}{dt}e_i(t).$$

因为 $\mathcal{P}^t_{t+\Delta t}:T_{\gamma(t+\Delta t)}M\to T_{\gamma(t)}M$ 是同构, 所以

$$\mathcal{P}^t_{t+\Delta t}(X(\gamma(t+\Delta t)))=\mathcal{P}^t_{t+\Delta t}\left(X^i(t+\Delta t)e_i(t+\Delta t)\right)=X^i(t+\Delta t)e_i(t).$$

从而,

$$\frac{\mathcal{P}^t_{t+\Delta t}(X\circ\gamma(t+\Delta t))-X\circ(\gamma(t))}{\Delta t}=\frac{X^i(t+\Delta t)-X^i(t)}{\Delta t}e_i(t),$$

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathcal{P}^t_{t+\Delta t}(X\circ\gamma(t+\Delta t))-X\circ(\gamma(t))}{\Delta t}=\frac{dX^i(t)}{dt}e_i(t)=D_{\dot\gamma(t)}X.$$

定理 3.2

设 (M,g) 为黎曼流形, ∇ 是黎曼联络, X,Y 为沿曲线 γ 的两个平行向量场, 则 $g(X,Y)$ 沿 γ 为常数.

证明

$$\frac{d}{dt}g(X,Y)=g(\nabla_{\dot\gamma(t)}X,Y)+g(X,\nabla_{\dot\gamma(t)}Y)=0.$$

对于黎曼联络, $\mathcal{P}^{t_1}_{t_0}:T_{\gamma(t_0)}M\to T_{\gamma(t_1)}M$ 为等距同构.

3.3 和乐群

和乐群 (Holonomy Group) 是 Élie Cartan (1926) 首先引进的. 设 γ 是经过 p 的分段光滑可缩闭曲线, $\mathcal{P}_{\gamma,p}$ 是由沿 γ 的平行移动生成的 T_pM 的等距自同构, 则 $\mathcal{P}_{\gamma,p}\in O(n)$. 定义 p 处的和乐群为

$$\mathrm{Hol}_p=\left\{\mathcal{P}_{\gamma,p}\,\middle|\,\gamma\text{ 为经过 }p\text{ 的分段光滑闭曲线}\right\},$$

则 $\mathrm{Hol}_p\subset O(n)$. 定义 p 处的限制和乐群为

$$\mathrm{Hol}^0_p=\left\{\mathcal{P}_{\gamma,p}\,\middle|\,\gamma\text{ 为经过 }p\text{ 的可缩的分段光滑闭曲线}\right\},$$

对于不同基点, 有 $\mathrm{Hol}_p=\xi^{-1}\mathrm{Hol}_q\,\xi$, 其中 ξ 为从 p 到 q 的平行移动. 因此和乐群与基点选取无关. 若 M 单连通, 则 $\mathrm{Hol}^0=\mathrm{Hol}$.

定理 3.3 (Berger 分类定理)

设 (M,g) 是单连通、不可约 (局部上不是乘积黎曼流形)、非局部对称的黎曼流形，则 $\mathrm{Hol}(M,g)$ 只有以下可能：

Hol	$\dim M$	**Type of manifold**	**Properties**
$\mathrm{SO}(n)$	n	Orientable manifold	—
$\mathrm{U}(n)$	$2n$	Kähler manifold	Kähler
$\mathrm{SU}(n)$	$2n$	Calabi–Yau manifold	Ricci-flat, Kähler
$\mathrm{Sp}(n)\cdot\mathrm{Sp}(1)$	$4n\ (n\geq 2)$	Quaternion-Kähler manifold	Einstein
$\mathrm{Sp}(n)$	$4n$	Hyperkähler manifold	Ricci-flat, Kähler
G_2	7	G_2 manifold	Ricci-flat
$\mathrm{Spin}(7)$	8	Spin(7) manifold	Ricci-flat

表 3.1: Berger's classification of holonomy groups

和乐群的“无穷小生成元”——曲率.

例 3.1 欧氏空间的 $\mathrm{Hol}=\{1\}$. n 维标准球面的和乐群是 $\mathrm{SO}(n)$. n 维双曲空间的和乐群呢?

第 4 章 曲率

4.1 曲率张量

设 (M,g) 为黎曼流形, ∇ 为 Levi-Civita 联络. 对向量场求二阶导数: $\nabla X \in \Gamma(\otimes^{1,1}TM)$, $\nabla^2 X \in \Gamma(\otimes^{1,2}TM)$.

$$\nabla X(\alpha, Y) = \alpha(\nabla_Y X).$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 X(\alpha, Y, Z) &= Z\alpha(\nabla_Y X) - (\nabla_Z \alpha)(\nabla_Y X) - \alpha(\nabla_{\nabla_Z Y} X)\\ &= Z\alpha(\nabla_Y X) - (Z\alpha(\nabla_Y X) - \alpha(\nabla_Z \nabla_Y X)) - \alpha(\nabla_{\nabla_Z Y} X)\\ &= \alpha\left(\nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{\nabla_Z Y} X\right).\end{aligned}$$

$$\nabla^2_{Y,Z} X = \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{\nabla_Z Y} X.$$

$\nabla^2 X$ 是否对称? 若联络无挠, 有

$$\begin{aligned}\nabla^2_{Y,Z} X - \nabla^2_{Z,Y} X &= \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_{[Z,Y]} X\\ &\triangleq [\nabla_Z, \nabla_Y] X - \nabla_{[Z,Y]} X.\end{aligned}$$

类比挠率,

定义 4.1 (曲率张量)

定义曲率张量 R 为

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z.$$

♣

注 易见曲率张量关于 X 和 Y 是函数线性的, 实际上关于 Z 也是函数线性的. 可以直接验证 (自行完成), 也可以通过**第一 Bianchi 恒等式**:

命题 4.1 (第一 Bianchi 恒等式)

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0.$$

♠

证明 由无挠性, $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$, 于是

$$\begin{aligned}&R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y\\ =&\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z + \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X\\ &+ \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]} Y\\ =&\nabla_X [Y,Z] + \nabla_Y [Z,X] + \nabla_Z [X,Y] - \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[Y,Z]} Z - \nabla_{[Z,X]} Y\\ =&[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0.\end{aligned}$$

最后一个等号即 Jacobi 恒等式.

根据第一 Bianchi 恒等式, 有

$$R(X,Y)Z = -R(Y,Z)X - R(Z,X)Y,$$

易见右边关于 Z 是函数线性的, 从而 $R(X,Y)Z$ 关于 Z 也是函数线性的.

$R(\cdot,\cdot)\cdot$ 是 $(1,3)$ 型张量场. 局部上, 设

$$R = R^l_{ijk}\frac{\partial}{\partial x^l}\otimes dx^i\otimes dx^j\otimes dx^k,$$

计算可得

$$\begin{aligned}R^l_{ijk} &= dx^l\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\\ &= dx^l\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k}-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k}\right)\\ &= dx^l\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\left(\Gamma^m_{jk}\frac{\partial}{\partial x^m}\right)-\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\left(\Gamma^m_{ik}\frac{\partial}{\partial x^m}\right)\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x^i}\Gamma^l_{jk}-\frac{\partial}{\partial x^j}\Gamma^l_{ik}+\Gamma^m_{jk}\Gamma^l_{im}-\Gamma^m_{ik}\Gamma^l_{jm}.\end{aligned}$$

令 $R(X,Y,Z,W)=\langle R(X,Y)Z,W\rangle_g$, 则 $R(\cdot,\cdot,\cdot,\cdot)$ 是一个 $(0,4)$ 型的张量场. 设

$$R = R_{ijkl}dx^i\otimes dx^j\otimes dx^k\otimes dx^l.$$

计算可得

$$\begin{aligned}R_{ijkl} &= \left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle-\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle\\ &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle-\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k},\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle\\ &\quad-\frac{\partial}{\partial x^j}\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle+\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k},\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle.\end{aligned}$$

因为

$$\left\langle\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\frac{\partial}{\partial x^k},\frac{\partial}{\partial x^l}\right\rangle=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^k}+\frac{\partial g_{lk}}{\partial x^j}-\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^l}\right),$$

所以

$$R_{ijkl}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 g_{ik}}{\partial x^j\partial x^l}+\frac{\partial^2 g_{jl}}{\partial x^i\partial x^k}-\frac{\partial^2 g_{il}}{\partial x^j\partial x^k}-\frac{\partial^2 g_{jk}}{\partial x^i\partial x^l}\right)+g_{rs}\left(\Gamma^r_{ik}\Gamma^s_{jl}-\Gamma^r_{il}\Gamma^s_{jk}\right). \tag{4.1}$$

命题 4.2 (曲率张量的对称性)

1. 第一 Bianchi 恒等式:
$$R(X,Y,Z,W)+R(Y,Z,X,W)+R(Z,X,Y,W)=0.$$
2. 反对称性:
$$R(X,Y,Z,W)=-R(Y,X,Z,W),\quad R(X,Y,Z,W)=-R(X,Y,W,Z).$$
3. 对称性:
$$R(X,Y,Z,W)=R(Z,W,X,Y).$$

注 由曲率张量的反对称性, 曲率张量可以视为 $\mathrm{End}(\wedge^2TM)$ 的截面:

$$\langle\mathcal{R}(X\wedge Y),Z\wedge W\rangle\triangleq R(X,Y,Z,W).$$

其中度量以自然方式延拓到 $\wedge^2TM$ 上. $\mathcal{R}$ 称为**曲率算子**. 由对称性, 可知 $\mathcal{R}$ 是对称的.

4.2 三种曲率

定义 4.2

设 Π 为 T_pM 的一个二维子空间, 取其一组基 X, Y, 定义截面曲率为

$$K(\Pi) = \frac{R(Y, X, X, Y)}{|X \wedge Y|^2},$$

其中, $|X \wedge Y|^2 = |X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2$.

注 $K(\Pi)$ 与基的选取无关. 选另一组基 Z, W, 设 $Z = aX + bY, W = cX + dY$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$. 计算可得

$$|Z \wedge W|^2 = (ad - bc)^2|X \wedge Y|^2,$$

$$R(W, Z, Z, W) = (ad - bc)^2R(Y, X, X, Y).$$

于是,

$$\frac{R(W, Z, Z, W)}{|Z \wedge W|^2} = \frac{R(Y, X, X, Y)}{|X \wedge Y|^2}.$$

定义 4.3 (Ricci 曲率)

对曲率张量的 2, 3 (或 1, 4) 位置关于 g 求迹, 得到 **Ricci** 曲率 Ric.

由于曲率张量的对称性, Ricci 曲率是对称的二阶协变张量场. 在局部坐标系下, 设 $\mathrm{Ric} = R_{ij}dx^idx^j$, 则

$$R_{ij} = g^{kl}R_{iklj} = g^{kl}R_{kijl}.$$

设 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 是一组标准正交基, 对任意向量场 X, Y, 有

$$\mathrm{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^n R(X, e_i, e_i, Y) = \sum_{i=1}^n R(e_i, X, Y, e_i).$$

特别地, 我们得到 $\mathrm{Ric}(e_1, e_1) = \sum_{i=2}^n R(e_i, e_1, e_1, e_i)$ 是 $n - 1$ 个截面曲率之和.

定义 4.4 (数量曲率)

定义数量曲率为 $S := \mathrm{tr}_g \mathrm{Ric}$.

在局部坐标系下, $S = g^{ij}R_{ij} = g^{ij}g^{kl}R_{iklj}$. 取一组标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^n$, 则有

$$S = \sum_{i,j} R(e_i, e_j, e_j, e_i),$$

为 $n(n - 1)$ 个截面曲率之和.

定义 4.5 (Einstein 流形)

我们称 (M, g) 是一个 **Einstein** 流形, 若存在常数 λ, 使 $\mathrm{Ric}_g = \lambda g$.

方程两边关于 g 取迹, 得 $S = n\lambda$, 因此 S 为常数.

注 Einstein 场方程 ($n \geq 3$):

$$\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}Sg + \Lambda g = cT.$$

其中, $\mathrm{Ric} - \frac{1}{2}Sg$ 被称为 **Eintein 张量**, Λ 是宇宙常数, c 为常数, T 为能动张量, 由物质分布决定. 若 $T \equiv 0$, 对等式两边关于 g 求迹得

$$\left(1 - \frac{n}{2}\right) S + n\Lambda = 0.$$

再代入方程得

$$\mathrm{Ric} = \frac{2\Lambda}{n-2}g.$$

这也是 Einstein 流形得名的原因.

4.3 一些典型例子

例 4.1 欧氏空间 $\Gamma_{ij}^k \equiv 0$, 则 $R \equiv 0$.

例 4.2 双曲空间上半空间模型 度量 $g = \dfrac{1}{(x^n)^2}((dx^1)^2 + \cdots + (dx^n)^2)$. 因为 $g_{ij} = \dfrac{1}{(x^n)^2}\delta_{ij}$, $g^{ij} = (x^n)^2\delta_{ij}$, 计算可得

$$\begin{aligned}
\Gamma_{ij}^k &= \frac{1}{2}g^{km}\left(\frac{\partial g_{im}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m}\right) \\
&= \frac{1}{2}(x^n)^2\left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right) \\
&= (x^n)^{-1}\left(-\delta_{ik}\delta_{jn} - \delta_{kj}\delta_{in} + \delta_{ij}\delta_{kn}\right), \\
\frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^k \partial x^l} &= 6(x^n)^{-4}\delta_{kn}\delta_{ij}.
\end{aligned}$$

于是

$$R_{ijkl} = (x^n)^{-4}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}) = -(g_{il}g_{jk} - g_{ik}g_{jl}).$$

进而得到截面曲率为 -1, $\mathrm{Ric} = -(n-1)g$, $S = -n(n-1)$.

例 4.3 球面 考虑 $i : \mathbb{S}^n \hookrightarrow (\mathbb{R}^{n+1}, g_E)$, 度量 $g = i^*g_E$. 用 $\bar{\nabla}$ 表示 $(\mathbb{R}^{n+1}, g_E)$ 的黎曼联络, 用 $\vec{x}$ 表示球面的位置向量. 若 X, Y 为球面的切向量场, 则有 $\langle X, \vec{x}\rangle = 0$, $\langle Y, \vec{x}\rangle = 0$. 又

$$\bar{\nabla}_X\vec{x} = (X(x^1), \cdots, X(x^n)) = X,$$

从而

$$\langle\bar{\nabla}_X Y, \vec{x}\rangle = X\langle Y, \vec{x}\rangle - \langle Y, \bar{\nabla}_X\vec{x}\rangle = -\langle X, Y\rangle.$$

于是,

$$\nabla_X Y = \bar{\nabla}_X Y + \langle X, Y\rangle\vec{x}.$$

计算可得

$$\begin{aligned}
\nabla_Y\nabla_X Z &= \bar{\nabla}_Y\nabla_X Z + \langle Y, \nabla_X Z\rangle\vec{x} \\
&= \bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X Z + \bar{\nabla}_Y\left(\langle X, Z\rangle\vec{x}\right) + \langle Y, \nabla_X Z\rangle\vec{x} \\
&= \bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X Z + Y\langle X, Z\rangle\vec{x} + \langle X, Z\rangle Y + \langle Y, \nabla_X Z\rangle\vec{x},
\end{aligned}$$

同理, 有

$$\nabla_X\nabla_Y Z = \bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y Z + X\langle Y, Z\rangle\vec{x} + \langle Y, Z\rangle X + \langle X, \nabla_Y Z\rangle\vec{x},$$

又因为

$$\nabla_{[X,Y]}Z=\bar{\nabla}_{[X,Y]}Z+\langle[X,Y],Z\rangle\vec{x},$$

所以

$$R(X,Y)Z=\bar{R}(X,Y)Z+\langle Y,Z\rangle X-\langle X,Z\rangle Y,$$

进而

$$R(X,Y,Z,W)=\langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle-\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle.$$

于是可得球面标准度量截面曲率恒为 1, $\mathrm{Ric}=(n-1)g$, $S=n(n-1)$.

命题 4.3

若一个度量的截面曲率为常数 c, 则

$$R(X,Y,Z,W)=c(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle-\langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle).$$

练习 4.1 证明上面命题.

练习 4.2 证明 3 维 Einstein 流形的截面曲率为常数.

4.4 子流形的曲率

设 $(\bar{M},\bar{g})$ 是黎曼流形, 联络和曲率分别记为 $\bar{\nabla}$ 和 $\bar{R}$. 设 M 是 $\bar{M}$ 的嵌入子流形, 诱导度量, 联络和曲率分别记为 g, ∇ 和 R. 设 X,Y,Z,W 为 M 上向量场. 由第二基本形式的定义, 有

$$\bar{\nabla}_YZ=\nabla_YZ+\mathrm{II}(Y,Z).$$

对等式两边再求一次协变导数, 有

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_YZ&=\bar{\nabla}_X\nabla_YZ+\bar{\nabla}_X\left(\mathrm{II}(Y,Z)\right)\\&=\nabla_X\nabla_YZ+\mathrm{II}(X,\nabla_YZ)+\bar{\nabla}_X\left(\mathrm{II}(Y,Z)\right).\end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_XZ&=\bar{\nabla}_Y\nabla_XZ+\bar{\nabla}_Y\left(\mathrm{II}(X,Z)\right)\\&=\nabla_Y\nabla_XZ+\mathrm{II}(Y,\nabla_XZ)+\bar{\nabla}_Y\left(\mathrm{II}(X,Z)\right).\end{aligned}$$

还有

$$\bar{\nabla}_{[X,Y]}Z=\nabla_{[X,Y]}Z+\mathrm{II}([X,Y],Z).$$

联合以上三式, 得

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y)Z=&R(X,Y)Z+\bar{\nabla}_X\left(\mathrm{II}(Y,Z)\right)-\bar{\nabla}_Y\left(\mathrm{II}(X,Z)\right)\\&+\mathrm{II}(X,\nabla_YZ)-\mathrm{II}(Y,\nabla_XZ)-\mathrm{II}([X,Y],Z).\end{aligned}\tag{4.2}$$

将(4.2)式两端与 W 做内积, 得

$$\bar{R}(X,Y,Z,W)=R(X,Y,Z,W)+\left\langle\bar{\nabla}_X\left(\mathrm{II}(Y,Z)\right),W\right\rangle-\left\langle\bar{\nabla}_Y\left(\mathrm{II}(X,Z)\right),W\right\rangle.$$

注意

$$\begin{aligned}\left\langle\bar{\nabla}_X\left(\mathrm{II}(Y,Z)\right),W\right\rangle&=X\left\langle\mathrm{II}(Y,Z),W\right\rangle-\left\langle\mathrm{II}(Y,Z),\bar{\nabla}_XW\right\rangle\\&=-\left\langle\mathrm{II}(Y,Z),\mathrm{II}(X,W)\right\rangle.\end{aligned}$$

同理,

$$\left\langle \bar{\nabla}_Y \left(\mathrm{I\!I}(X,Z)\right), W \right\rangle = -\left\langle \mathrm{I\!I}(X,Z), \mathrm{I\!I}(Y,W) \right\rangle.$$

因此有

$$R(X,Y,Z,W) = \bar{R}(X,Y,Z,W) + \left\langle \mathrm{I\!I}(Y,Z), \mathrm{I\!I}(X,W) \right\rangle - \left\langle \mathrm{I\!I}(X,Z), \mathrm{I\!I}(Y,W) \right\rangle.$$

上式被称为 **Gauss 方程**.

考虑(4.2)的法向投影, 有

$$\begin{aligned} \perp\bar{R}(X,Y)Z = & \perp\bar{\nabla}_X \left(\mathrm{I\!I}(Y,Z)\right) - \perp\bar{\nabla}_Y \left(\mathrm{I\!I}(X,Z)\right) \\ & + \mathrm{I\!I}(X,\nabla_Y Z) - \mathrm{I\!I}(Y,\nabla_X Z) - \mathrm{I\!I}([X,Y],Z). \end{aligned}$$

上式称为 **Codazzi 方程**.

若 M 是 $\bar{M}$ 的超曲面, 且法丛平凡, 则可以取一个单位法向量场 ν. 有 $\mathrm{I\!I}(X,Y) = \left\langle \bar{\nabla}_X Y, \nu \right\rangle \nu$. 令 $\mathrm{I\!I}_\nu(X,Y) = \left\langle \bar{\nabla}_X Y, \nu \right\rangle$, 则 Gauss 方程可以写成

$$R(X,Y,Z,W) = \bar{R}(X,Y,Z,W) + \mathrm{I\!I}_\nu(Y,Z)\cdot\mathrm{I\!I}_\nu(X,W) - \mathrm{I\!I}_\nu(X,Z)\cdot\mathrm{I\!I}_\nu(Y,W).$$

注意

$$\bar{\nabla}_X \left(\mathrm{I\!I}(Y,Z)\right) = \left(X\, \mathrm{I\!I}_\nu(Y,Z)\right)\nu + \mathrm{I\!I}_\nu(Y,Z)\nabla_X \nu.$$

只考虑法向分量, 有

$$\perp\bar{\nabla}_X \left(\mathrm{I\!I}(Y,Z)\right) = \left(X\, \mathrm{I\!I}_\nu(Y,Z)\right)\nu.$$

再注意到

$$(\nabla_X \mathrm{I\!I}_\nu)(Y,Z) = X\, \mathrm{I\!I}_\nu(Y,Z) - \mathrm{I\!I}_\nu(\nabla_X Y, Z) - \mathrm{I\!I}_\nu(Y, \nabla_X Z).$$

因此, Codazzi 方程可以简化为

$$\perp\bar{R}(X,Y)Z = \left[(\nabla_X \mathrm{I\!I}_\nu)(Y,Z) - (\nabla_Y \mathrm{I\!I}_\nu)(X,Z)\right]\nu.$$

当 $(\bar{M}, \bar{g})$ 为 $(\mathbb{R}^{n+1}, g_E)$ 时, Gauss 方程变为

$$R(X,Y,Z,W) = \mathrm{I\!I}_\nu(Y,Z)\cdot\mathrm{I\!I}_\nu(X,W) - \mathrm{I\!I}_\nu(X,Z)\cdot\mathrm{I\!I}_\nu(Y,W).$$

Codazzi 方程变为

$$(\nabla_X \mathrm{I\!I}_\nu)(Y,Z) = (\nabla_Y \mathrm{I\!I}_\nu)(X,Z).$$

即, $\nabla\, \mathrm{I\!I}_\nu$ 是全对称 $(0,3)$ 张量场.

4.5 第二 Bianchi 恒等式与 Shur 定理

命题 4.4 (第二 Bianchi 恒等式)

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W + (\nabla_Y R)(Z,X)W + (\nabla_Z R)(X,Y)W = 0.$$

证明 根据定义, 有

$$\begin{aligned} & (\nabla_X R)(Y,Z)W + (\nabla_Y R)(Z,X)W + (\nabla_Z R)(X,Y)W \\ = & \nabla_X(R(Y,Z)W) - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z)W - R(Y,Z)\nabla_X W \\ & + \nabla_Y(R(Z,X)W) - R(\nabla_Y Z, X)W - R(Z, \nabla_Y X)W - R(Z,X)\nabla_Y W \\ & + \nabla_Z(R(X,Y)W) - R(\nabla_Z X, Y)W - R(X, \nabla_Z Y)W - R(X,Y)\nabla_Z W. \end{aligned}$$

利用曲率张量的反对称性和联络的无挠性, 可以简化中间两列:

$$\begin{aligned} & -R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z)W - R(\nabla_Y Z, X)W \\ & -R(Z, \nabla_Y X)W - R(\nabla_Z X, Y)W - R(X, \nabla_Z Y)W \\ = & -R([X,Y],Z)W - R([Y,Z],X)W - R([Z,X],Y)W. \end{aligned}$$

按曲率张量定义展开第一列, 得

$$\begin{aligned} & \nabla_X(R(Y,Z)W) + \nabla_Y(R(Z,X)W) + \nabla_Z(R(X,Y)W) \\ = & \nabla_X\nabla_Y\nabla_Z W - \nabla_X\nabla_Z\nabla_Y W - \nabla_X\nabla_{[Y,Z]}W \\ & + \nabla_Y\nabla_Z\nabla_X W - \nabla_Y\nabla_X\nabla_Z W - \nabla_Y\nabla_{[Z,X]}W \\ & + \nabla_Z\nabla_X\nabla_Y W - \nabla_Z\nabla_Y\nabla_X W - \nabla_Z\nabla_{[X,Y]}W. \end{aligned} \tag{4.3}$$

按曲率张量定义展开最后一列, 得

$$\begin{aligned} & -R(Y,Z)\nabla_X W - R(Z,X)\nabla_Y W - R(X,Y)\nabla_Z W \\ = & -\nabla_Y\nabla_Z\nabla_X W + \nabla_Z\nabla_Y\nabla_X W + \nabla_{[Y,Z]}\nabla_X W \\ & -\nabla_Z\nabla_X\nabla_Y W + \nabla_X\nabla_Z\nabla_Y W + \nabla_{[Z,X]}\nabla_Y W \\ & -\nabla_X\nabla_Y\nabla_Z W + \nabla_Y\nabla_X\nabla_Z W + \nabla_{[X,Y]}\nabla_Z W \end{aligned} \tag{4.4}$$

将(4.3)和(4.4)加起来, 得到右边项为

$$\begin{aligned} & -\nabla_X\nabla_{[Y,Z]}W - \nabla_Y\nabla_{[Z,X]}W - \nabla_Z\nabla_{[X,Y]}W \\ & + \nabla_{[Y,Z]}\nabla_X W + \nabla_{[Z,X]}\nabla_Y W + \nabla_{[X,Y]}\nabla_Z W \end{aligned}$$

注意, 由 Jacobi 恒等式,

$$\nabla_{[X,[Y,Z]]}W + \nabla_{[Y,[Z,X]]}W + \nabla_{[Z,[X,Y]]}W = 0.$$

将以上合在一起即得结论.

注 注意

$$\begin{aligned} \nabla R(X,Y,Z,W,V) = & (\nabla_V R)(X,Y,Z,W) \\ = & VR(X,Y,Z,W) - R(\nabla_V X, Y, Z, W) - R(X, \nabla_V Y, Z, W) \\ & - R(X,Y,\nabla_V Z, W) - R(X,Y,Z,\nabla_V W) \\ = & \langle \nabla_V(R(X,Y)Z), W\rangle - R(\nabla_V X, Y, Z, W) \\ & - R(X, \nabla_V Y, Z, W) - R(X, Y, \nabla_V Z, W) \\ = & \langle (\nabla_V R)(X,Y)Z, W\rangle, \end{aligned}$$

可得第二 Bianchi 恒等式的另一种形式

$$\nabla R(X,Y,Z,W,V) + \nabla R(Y,V,Z,W,X) + \nabla R(V,X,Z,W,Y) = 0.$$

在局部上, 令 $\nabla R = R_{ijkl,h} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l \otimes dx^h$, 则

$$R_{ijkl,h} + R_{ijlh,k} + R_{ijhk,l} = 0.$$

接下来, 用第二 Bianchi 恒等式证明如下 Shur 定理.

定理 4.1 (Shur 定理)

设 (M,g) 为 n 维黎曼流形 $(n\geq 3)$. 若存在光滑函数 f, 使得 $\mathrm{Ric}=fg$, 则 f 为常数. ♡

证明 根据定义, 在局部坐标系下, 有

$$S=g^{ij}g^{kl}R_{iklj}.$$

对等式两边关于 $\frac{\partial}{\partial x^m}$ 求协变导数, 得

$$S_m=g^{ij}g^{kl}R_{iklj,m}.$$

利用第二 Bianchi 恒等式, 得

$$S_m=-g^{ij}g^{kl}R_{ikjm,l}-g^{ij}g^{kl}R_{ikml,j}=2g^{ij}R_{mi,j}.$$

即

$$\nabla S=\operatorname{div}\mathrm{Ric}\,.$$

若 $R_{ij}=f(x)g_{ij}$, 则 $f(x)=\dfrac{S}{n}$, 于是

$$R_{ij}=\frac{S}{n}g_{ij},\ R_{mi,j}=\frac{1}{n}S_jg_{mi},$$

$$S_m=2g^{ij}R_{mi,j}=\frac{2}{n}g^{ij}S_jg_{mi}=\frac{2}{n}S_m,$$

所以 $\nabla S\equiv 0$, 进而 S 为常数.

4.6 Ricci 恒等式

设 (M,g) 为黎曼流形, 黎曼联络为 ∇. 设 $f\in C^\infty(M)$. 已知

$$\nabla^2 f(X,Y)=YXf-(\nabla_Y X)f=XYf-(\nabla_X Y)f=\nabla^2 f(Y,X).$$

即 $\nabla^2 f(\cdot,\cdot)$ 是对称的. 那么, $\nabla^3 f(\cdot,\cdot,\cdot)$ 呢? 计算可得

$$\begin{aligned}\nabla^3 f(X,Y,Z)&=Z\nabla^2 f(X,Y)-\nabla^2 f(\nabla_Z X,Y)-\nabla^2 f(X,\nabla_Z Y)\\&=Z\langle X,\nabla_Y\nabla f\rangle-\langle\nabla_Z X,\nabla_Y\nabla f\rangle-\langle X,\nabla_{\nabla_Z Y}\nabla f\rangle\\&=\langle X,\nabla_Z\nabla_Y\nabla f-\nabla_{\nabla_Z Y}\nabla f\rangle,\end{aligned}$$

同理可得

$$\nabla^3 f(X,Z,Y)=\langle X,\nabla_Y\nabla_Z\nabla f-\nabla_{\nabla_Y Z}\nabla f\rangle,$$

于是,

$$\nabla^3 f(X,Y,Z)-\nabla^3 f(X,Z,Y)=\langle X,R(Z,Y)\nabla f\rangle=R(Y,Z,X,\nabla f).$$

考虑 $(1,1)$ 型张量 T, 计算可得

$$\nabla T(\omega,X,Y)=YT(\omega,X)-T(\nabla_Y\omega,X)-T(\omega,\nabla_Y X),$$

$$\begin{aligned}\nabla^2 T(\omega,X,Y,Z) &= Z\nabla T(\omega,X,Y)-\nabla T(\nabla_Z\omega,X,Y)-\nabla T(\omega,\nabla_Z X,Y)-\nabla T(\omega,X,\nabla_Z Y)\\ &= ZYT(\omega,X)-ZT(\nabla_Y\omega,X)-ZT(\omega,\nabla_Y X)\\ &\quad -YT(\nabla_Z\omega,X)+T(\nabla_Y\nabla_Z\omega,X)+T(\nabla_Z\omega,\nabla_Y X)\\ &\quad -YT(\omega,\nabla_Z X)+T(\nabla_Y\omega,\nabla_Z X)+T(\omega,\nabla_Y\nabla_Z X)\\ &\quad -(\nabla_Z Y)T(\omega,X)+T(\nabla_{\nabla_Z Y}\omega,X)+T(\omega,\nabla_{\nabla_Z Y}X).\end{aligned}$$

进而可得,

$$\begin{aligned}&\nabla^2 T(\omega,X,Y,Z)-\nabla^2 T(\omega,X,Z,Y)\\ =&T(\nabla_Y\nabla_Z\omega-\nabla_Z\nabla_Y\omega-\nabla_{[Y,Z]}\omega,X)+T(\omega,R(Y,Z)X)\\ =&T(R(Y,Z)\omega,X)+T(\omega,R(Y,Z)X).\end{aligned}$$

其中, 我们将 $\nabla_Y\nabla_Z\omega-\nabla_Z\nabla_Y\omega-\nabla_{[Y,Z]}\omega$ 记成了 $R(Y,Z)\omega$. 将上述结果推广, 我们得到

$$\begin{aligned}&\nabla^2 T(\omega_1,\cdots,\omega_r,X_1,\cdots,X_s,Y,Z)-\nabla^2 T(\omega_1,\cdots,\omega_r,X_1,\cdots,X_s,Z,Y)\\ =&\sum_{i=1}^r T(\omega_1,\cdots,R(Y,Z)\omega_i,\cdots,\omega_r,X_1,\cdots,X_s)\\ &+\sum_{j=1}^s T(\omega_1,\cdots,\omega_r,X_1,\cdots,R(Y,Z)X_j,\cdots,X_s)\\ \triangleq&R(Z,Y)T(\omega_1,\cdots,\omega_r,X_1,\cdots,X_s).\end{aligned}$$

有

$$\nabla(T\otimes K)=(\nabla T)\otimes K+T\otimes(\nabla K),$$

$$\nabla^2(T\otimes K)=(\nabla^2 T)\otimes K+T\otimes(\nabla^2 K)+2(\nabla T)\otimes(\nabla K),$$

因此

$$R(Y,Z)(T\otimes K)=(R(Y,Z)T)\otimes K+T\otimes(R(Y,Z)K).$$

有

$$\begin{aligned}0&=R(Y,Z)(\omega(X))=R(Y,Z)(\mathrm{tr}(\omega\otimes X))=\mathrm{tr}(R(Y,Z)(\omega\otimes X))\\ &=\mathrm{tr}[(R(Y,Z)\omega)\otimes X+\omega\otimes(R(Y,Z)X)]=(R(Y,Z)\omega)(X)+\omega(R(Y,Z)X).\end{aligned}$$

于是 $(R(Y,Z)\omega)(X)=-\omega(R(Y,Z)X)$.

在局部坐标系下,

$$\left(R\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)dx^k\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^l}\right)=-dx^k\left(R^s_{ijl}\frac{\partial}{\partial x^s}\right)=-R^k_{ijl},$$

于是,

$$R\left(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\right)dx^k=-R^k_{ijl}dx^l.$$

在局部坐标系之下,

$$T=T^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_s}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s},$$

$$\nabla^2 T=T^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_s,kl}\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}\otimes\cdots\otimes\frac{\partial}{\partial x^{i_r}}\otimes dx^{j_1}\otimes\cdots\otimes dx^{j_s}\otimes dx^k\otimes dx^l,$$

我们可以得到 **Ricci 恒等式**:

$$T^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_s,kl} - T^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_s,lk} = -\sum_{p=1}^{r} T^{i_1,\cdots,i_{p-1},i,i_{p+1},\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_s} R^{i_p}_{kli} + \sum_{q=1}^{s} T^{i_1,\cdots,i_r}_{j_1,\cdots,j_{q-1},j,j_{q+1},\cdots,j_s} R^{j}_{klj_q}.$$

✍ **练习 4.3** 设 (M,g) 是黎曼流形, $f \in C^\infty(M)$. 证明:

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \left|\nabla^2 f\right|^2 + |\, \langle \nabla\Delta f, \nabla f\rangle + \mathrm{Ric}(\nabla f, \nabla f).$$

第 5 章 测地线

5.1 测地线的定义

动机: 设 (M,g) 为黎曼流形, 设 $\sigma:[a,b]\to M$ 为分段光滑曲线. 可以定义曲线长度为
$$L(\sigma)=\int_a^b\sqrt{\langle\dot\sigma(t),\dot\sigma(t)\rangle}\,dt.$$
自然的问题是: 如何定义黎曼流形两点间距离? 两点间距离是否能被一条连接这两点的光滑曲线的长度实现? 若能实现的话, 这样的曲线应该被称为"最短线". "最短线"满足何种性质? 与我们的章名"测地线"有何联系?

定义 5.1

从曲线长度出发, 在黎曼流形 (M,g) 上定义**距离**: $\forall p,\ q\in M$,
$$d(p,q)=\inf\left\{L(\sigma)\,\middle|\,\sigma\text{是连接}p,\ q\text{的分段光滑曲线}\right\}.$$
♣

距离要满足以下三个条件:

(1) 正定性: 非负性显然

(2) 对称性: 显然

(3) 三角不等式: 显然

正定性: 当 $p\neq q$ 时, 证明 $d(p,q)>0$.

证明 在 p 附近取局部坐标系 $(U,\{x^i\}_{i=1}^n)$, 使得 $x^i(p)=0\,(1\le i\le n)$. 取充分小的 $\delta>0$ 使得 $q\notin B_\delta(p)=\left\{y\in U\middle||x(y)|\le\delta\right\}$. 记 $g_0=\sum_{i=1}^n(dx^i)^2$, 则在 $B_\delta(p)$ 上, 存在 $\lambda>0$ 使得 $g\ge\lambda^2g_0$.

设 σ 为连接 p,q 的分段光滑曲线, σ 交 $\partial B_\delta(p)$ 于 s, 记 p 到 s 这一段为 σ_1, 则 $L_g(\sigma)\ge L_g(\sigma_1)$, 而
$$L_g(\sigma_1)\ge\lambda L_{g_0}(\sigma_1)=\lambda\delta.$$
由 σ 的任意性, 知 $d(p,q)\ge\lambda\delta>0$.

另一方面: 在任一点 p 的一个小坐标邻域 B_r 内, $\exists\Lambda>0$ 使得
$$g\le\Lambda^2g_0.$$
所以, B_r 内任意两点 y,z 间的距离
$$d(y,z)\le\Lambda|x(y)-x(z)|.$$
这个距离给出的拓扑与流形本身的拓扑一致.

定义 5.2 (最短线)

给定 $p,q\in M$, 若存在连接 p 和 q 的分段光滑的曲线 σ, 使得 $d(p,q)=L(\sigma)$, 则称 σ 为连接 p 和 q 的一条**最短线**. ♣

注 仅从定义看, 连接两点的最短线不一定存在, 也不一定唯一.

例 5.1 欧氏空间 直线段.

例 5.2 双曲空间 $\mathbb{H}^2=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\,\middle|\,y>0\right\}$, $g_{-1}=\dfrac{1}{y^2}\left(dx^2+dy^2\right)$.

先考虑一种简单的情况, $p(0,y_1)$, $q=(0,y_2)$. 记 $\sigma(t)=(x(t),y(t))$. 则

$$\begin{aligned} L(\sigma) &= \int_a^b |\dot\sigma(t)|\,dt = \int_a^b \frac{1}{y(t)}\sqrt{\dot x(t)^2+\dot y(t)^2}\,dt \\ &\geq \int_a^b \frac{|\dot y(t)|}{y(t)}\,dt \geq \left|\int_a^b \frac{\dot y(t)}{y(t)}\,dt\right| \\ &= \left|\ln\frac{y(b)}{y(a)}\right| = \ln\left|\frac{y_2}{y_1}\right|. \end{aligned}$$

$\mathbb{H}^2$ 上分式线性变换保持 g_{-1} 不变. 根据分式线性变换的性质, $(\mathbb{H}^2, g_{-1})$ 上连接任意两点的最短线存在, 要么是垂直于实轴的直线, 要么是两端垂直于实轴的圆弧.

例 5.3 $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ 中, $(-1,-1)$ 与 $(1,1)$ 之间无最短线相连.

最短线的存在性需要黎曼流形满足额外的条件, 这点后面再讲. 先看最短线存在的必要条件. 设 $\sigma:[a,b]\to M$ 为分段光滑曲线, 且

$$L(\sigma)=d\left(\sigma(a),\sigma(b)\right).$$

为了简便, 重新参数化, 令

$$\tilde t=\int_a^t |\dot\sigma(s)|\,ds.$$

即 $\tilde t$ 为弧长参数, $\tilde\sigma:[a,b]\to M$, $\left|\tilde\sigma'(\tilde t)\right|\equiv 1, \forall \tilde t\in[0,L(\sigma)]$. 为了简便, 省去 $\sim$, 仍记作 σ, t.

由三角不等式,

$$L(\sigma|_{[t_1,t_2]})=|t_1-t_2|,\quad \forall t_1,t_2\in[0,L(\sigma)]$$

因此可以逐段考虑, 不妨进一步假设 σ 包含在某个坐标邻域 U 内且光滑. 在局部坐标映射下, U 可视为 $\mathbb{R}^n$ 中开集. 在 U 中沿着 σ 取光滑向量场 V, 使得 $V(0)=0$, $V(L)=0$, 考虑映射

$$\begin{aligned} \gamma &: [0,L]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to U, \\ \gamma(t,s) &\mapsto \sigma(t)+sV(t). \end{aligned}$$

其中, ε 为充分小的正数. 对每个固定的 s, $\gamma_s(t)=\gamma(t,s)$ 是连接 $\sigma(0)$ 和 $\sigma(L)$ 的光滑曲线, 其长度记为 $L(s)$. 由

$$L(s)=L(\gamma_s)\geq d\left(\sigma(0),\sigma(L)\right)=L(\sigma),$$

可知 $s=0$ 为 $L(s)$ 的最小值点, 于是 $L'(0)=0$. 下面计算 L'.

$$\begin{aligned} L'(s) &= \frac{d}{ds}\int_0^L |\dot\gamma_s(t)|\,dt \\ &= \int_0^L \frac{d}{ds}\sqrt{\langle\dot\gamma_s(t),\dot\gamma_s(t)\rangle}\,dt \\ &= \int_0^L \frac{1}{|\dot\gamma_s(t)|}\left\langle \nabla_{\frac{\partial\gamma_s(t)}{\partial s}}\frac{\partial\gamma_s(t)}{\partial t}, \frac{\partial\gamma_s(t)}{\partial t}\right\rangle dt \\ &= \int_0^L \frac{1}{|\dot\gamma_s(t)|}\left\langle \nabla_{\frac{\partial\gamma_s(t)}{\partial t}}\frac{\partial\gamma_s(t)}{\partial s}, \frac{\partial\gamma_s(t)}{\partial t}\right\rangle dt. \end{aligned}$$

其中, 最后的等号用到了

$$\left[\frac{\partial\gamma_s}{\partial s},\frac{\partial\gamma_s}{\partial t}\right]=\gamma_*\left(\left[\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial t}\right]\right)=0.$$

当 $s=0$ 时, $|\dot{\gamma}_s(t)|\equiv 1$, 因此

$$
\begin{aligned}
L'(0) &= \int_0^L \left\langle \nabla_{\dot{\sigma}(t)} V(t), \dot{\sigma}(t) \right\rangle dt \\
&= \int_0^L \frac{d}{dt} \langle V(t), \dot{\sigma}(t) \rangle \, dt - \int_0^L \left\langle V(t), \nabla_{\dot{\sigma}(t)} \dot{\sigma}(t) \right\rangle dt \\
&= \langle V(t), \dot{\sigma}(t) \rangle \big|_0^L - \int_0^L \left\langle V(t), \nabla_{\dot{\sigma}(t)} \dot{\sigma}(t) \right\rangle dt.
\end{aligned}
$$

上式被称为**弧长的第一变分公式**. 由于 $V(0)=V(L)=0$,

$$
0 = L'(0) = -\int_0^L \left\langle V(t), \nabla_{\dot{\sigma}(t)} \dot{\sigma}(t) \right\rangle dt.
$$

取 $V(t)=t(L-t)\nabla_{\dot{\sigma}(t)}\dot{\sigma}(t)$ 代入, 得

$$
\int_0^L t(L-t) |\nabla_{\dot{\sigma}(t)} \dot{\sigma}(t)|^2 \, dt = 0.
$$

则可得到下面的**测地线方程**:

$$
\nabla_{\dot{\sigma}(t)} \dot{\sigma}(t) = 0.
$$

满足这样方程的曲线称为**测地线**. 在局部坐标系 $\{x^i\}_{i=1}^n$ 下, 记 $\sigma(t)=(x^1(t),\cdots,x^n(t))$, 则

$$
\sigma'(t) = \sum_{i=1}^n \dot{x}^i(t) \frac{\partial}{\partial x^i}.
$$

测地线方程:

$$
\ddot{x}^k(t) + \Gamma_{ij}^k(\sigma(t)) \dot{x}^i(t) \dot{x}^j(t) = 0, \quad k=1,\cdots,n.
$$

测地线的定义中蕴含 $|\dot{\sigma}(t)|\equiv c$, 因为

$$
\frac{d}{dt} \langle \dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t) \rangle = 2 \left\langle \nabla_{\dot{\sigma}(t)} \dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t) \right\rangle = 0.
$$

以弧长为参数的测地线称为**正规测地线**.

例 5.4 (欧氏空间) 由测地线方程

$$
0 = \nabla_{\dot{\sigma}(t)} \dot{\sigma}(t) = \ddot{\sigma}(t)
$$

解得

$$
\sigma(t) = at + b.
$$

例 5.5 (标准球面) 由测地线方程

$$
0 = \nabla_{\dot{\sigma}(t)} \dot{\sigma}(t) = \left(\bar{\nabla}_{\dot{\sigma}(t)} \dot{\sigma}(t) \right)^\top = \left(\ddot{\sigma}(t) \right)^\top,
$$

可得

$$
\ddot{\sigma}(t) = \lambda(t) \sigma(t).
$$

又有

$$
\lambda(t) = \langle \ddot{\sigma}(t), \sigma(t) \rangle = \langle \dot{\sigma}(t), \sigma(t) \rangle' - \langle \dot{\sigma}(t), \dot{\sigma}(t) \rangle = -c.
$$

因此

$$
\ddot{\sigma}(t) = -c\sigma(t).
$$

解得

$$
\sigma(t) = \cos(ct)\sigma(0) + \frac{1}{c} \sin(ct) \dot{\sigma}(0).
$$

故 S^n 中测地线为大圆弧, 其中劣弧为最短线, 优弧非最短线.

测地线方程为二阶常微分方程组, 任给 $p \in M$, $v \in T_pM$, 存在 $\varepsilon > 0$ 及测地线 $\sigma : [0, \varepsilon) \to M$, 使得 $\sigma(0) = p$, $\dot{\sigma}(0) = v$, 根据常微分方程组解关于初值的连续依赖性, 有

命题 5.1

任给 $p \in M$, 存在 p 的一个开邻域 U 及正数 λ, 使得对任意 $q \in U$, $w \in T_qM$, 当 $|w| \leq \lambda$ 时, 存在唯一的测地线 $\sigma : [0, 1] \to M$, 使得 $\sigma_{q,w}(0) = q$, $\dot{\sigma}_{q,w}(0) = w$.

5.2 指数映射

记 $B_p(\lambda) = \{v \in T_pM \big| |v| < \lambda\}$. 对于充分小的 λ, 定义映射

$$\exp_p : B_p(\lambda) \to M, \quad v \mapsto \sigma_{p,v}(1).$$

$\exp_p$ 称为 p 处的指数映射. 更一般地, 令

$$\mathcal{U} = \left\{(q, w) \in TM \,\middle|\, q \in U, \ |w| < \lambda\right\},$$

则 $\mathcal{U}$ 为 TM 中的开集. 由命题5.1, 对于充分小的 $\mathcal{U}$, 可以考虑指数映射

$$\exp : \mathcal{U} \to M, \quad (q, w) \mapsto \sigma_{q,w}(1) = \exp_q(w).$$

测地线方程的解光滑依赖初始条件, 所以 $\exp_p$ 和 $\exp$ 都是光滑映射.

引理 5.1

设 (M, g) 为黎曼流形, 则以下陈述成立:

(1) 在 $0 \in T_pM$ 处, 切映射 $(\exp_p)_{*0} : T_pM \to T_pM$ 为恒同. (将 $T_0(T_pM)$ 与 T_pM 视为等同).

(2) 任给紧集 $K \subset M$, 存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $\exp_p : B_p(\varepsilon) \to M$ 对于每个 $p \in K$ 为嵌入.

证明

(1) 按定义, $\exp_p$ 将零向量映为 p. 设 $v \in T_pM$, 令 $\xi(t) = tv$, 则 $\xi(t)$ 是从 0 出发的 T_pM 中的曲线, 初始切向量为 v, 由切映射的定义

$$(\exp_p)_{*0}(v) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp(\xi(t)) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \exp_p(tv).$$

另一方面, 设 σ 是从 p 出发的测地线, 且 $\dot{\sigma}(0) = v$. 当 t 充分小时, $\tau(s) = \sigma_v(ts)$ 是满足条件

$$\tau(0) = p, \quad \dot{\tau}(0) = t\dot{\sigma}(0) = tv$$

的唯一测地线, 因此 $\exp_p(tv) = \tau(1) = \sigma(t)$, 所以

$$(\exp_p)_{*0}(v) = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \sigma(t) = v,$$

即 $(\exp_p)_{*0}$ 为恒同映射.

(2) 由于 K 为紧集, 只需证明如下结论: 任给 $p \in M$, 均存在 $\varepsilon > 0$, 以及 p 的开邻域 W, 使得 $\exp_q : B_q(\varepsilon) \to M$ 对每个 $q \in W$ 均为嵌入. 下面利用逆映射定理来证明上述命题. 考虑映射 $E : \mathcal{U} \to M \times M$, $(q, w) \to (q, \exp_q w)$, 由 (1) 可知

$$E_{*(p,0)} : T_{(p,0)}\mathcal{U} \to T_{(p,p)}(M \times M) = T_pM \oplus T_pM$$

为恒同映射. 对 E 应用逆映射定理, 存在 $(p,0)$ 在 TM 中的开邻域 $\mathcal{W}$, 使得 E 将 $\mathcal{W}$ 微分同胚地映为 (p,p) 在 $M\times M$ 中的某个开邻域. 特别地, 存在 p 在 M 中的开邻域 W, 使得 $W\times W\subset E(\mathcal{W})$. 取充分小的正数 ε, 使得 $\{(q,w)\,|\,q\in W,\ |w|<\varepsilon\}\subset\mathcal{W}$, 则对任意 $q\in W$, 指数映射 $\exp_q:B_q(\varepsilon)\to M$ 为嵌入.

注 从证明中可以看出, 存在 p 的开邻域 Ω, 使得

$$\Omega\times\Omega\subset E\left(\{(q,w)\,|\,q\in W,\ |w|<\varepsilon\}\right).$$

此时, 任取 $q_1,q_2\in\Omega$, 存在唯一的 $w\in B_{q_1}(\varepsilon)$, 使得

$$q_2=\exp_{q_1}(w),$$

即 q_1 与 q_2 可以用长度小于 ε 的测地线相连.

设 $\delta>0$ 使得 $\exp_p:B_p(\delta)\to\exp(B_p(\delta))$ 为微分同胚. 设 $v\in B_p(\delta)$, 则 $\xi(t)=tv$ 为 $B_p(\delta)$ 中径向线段, $\sigma(t)=\exp_p(tv)$ 为从 p 出发的**径向测地线**. 径向测地线必为最短线.

命题 5.2

设 (M,g) 为黎曼流形.

(1) 设 $\exp_p:B_p(\delta)\to\exp(B_p(\delta))$ 为微分同胚, 记 $\exp(B_p(\delta))$ 为 $D_\delta(p)$. 设 $P,Q\in D_\delta(p)$, σ 为 $D_\delta(p)$ 中的连接 P 和 Q 的分段光滑曲线, 则

$$L(\sigma)\geq\left||\exp_p^{-1}(P)|-|\exp_p^{-1}(Q)|\right|.$$

(2) 任给 $q\in D_\delta(p)$, 有 $|\exp_p^{-1}(q)|=d(p,q)$, 即连接 p 和 q 的径向测地线为最短线.

证明 (1) 先假设 σ 是光滑的. 记 $\xi(s)=\exp_p^{-1}(\sigma(s))$, 则 $\xi(s)$ 是 $B_p(\delta)\subset T_pM$ 中连接 $\exp_p^{-1}(P)$ 和 $\exp_p^{-1}(Q)$ 的曲线. 令

$$\gamma:[0,1]\times[a,b]\to M,\quad (t,s)\mapsto\exp_p[t\xi(s)].$$

对每个固定的 $s\in[a,b]$, $\gamma_s(t)=\gamma(t,s)$ 均为 M 中从 p 出发的径向测地线. 记 $L(s)=L(\gamma_s)$, 根据弧长第一变分公式的推导, 有

$$\begin{aligned}
L'(s)&=\int_0^1\frac{1}{|\dot\gamma_s(t)|}\left\langle\nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial s}}\frac{\partial\gamma}{\partial t},\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\rangle dt\\
&=\frac{1}{|\xi(s)|}\int_0^1\left\langle\nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}}\frac{\partial\gamma}{\partial s},\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\rangle dt\\
&=\frac{1}{|\xi(s)|}\left\langle\frac{\partial\gamma}{\partial s},\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\rangle\Big|_0^1-\frac{1}{|\xi(s)|}\int_0^1\left\langle\frac{\partial\gamma}{\partial s},\nabla_{\frac{\partial\gamma}{\partial t}}\frac{\partial\gamma}{\partial t}\right\rangle dt\\
&=\frac{1}{|\xi(s)|}\langle\dot\sigma(s),\dot\gamma_s(1)\rangle
\end{aligned}$$

注意 $|\dot\gamma_s(1)|=|\dot\gamma_s(0)|=|\xi(s)|$, 于是, 由 Cauchy 不等式,

$$|L'(s)|\leq|\dot\sigma(s)|,\quad\forall s\in[a,b].$$

因此,

$$L(\sigma)=\int_a^b|\dot\sigma(s)|\,ds\geq\int_a^b|L'(s)|\,ds\geq|L(b)-L(a)|=\left||\exp_p^{-1}(P)|-|\exp_p^{-1}(Q)|\right|.$$

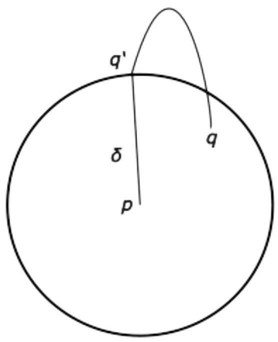
若 σ 是分段光滑曲线, 设 $\sigma=\cup_{i=1}^n\sigma_i$, σ_i 光滑, 连接 P_i 和 P_{i+1}, $P_1=P$, $P_{n+1}=Q$. 对每一段有

$$L(\sigma_i)\geq\left||\exp_p^{-1}(P_i)|-|\exp_p^{-1}(P_{i+1})|\right|.$$

合起来有

$$L(\sigma)=\sum_{i=1}^{n} L(\sigma_i) \geq \sum_{i=1}^{n} \left|\,|\exp_p^{-1}(P_i)|-|\exp_p^{-1}(P_{i+1})|\,\right| \geq \left|\left|\exp_p^{-1}(P)\right|-\left|\exp_p^{-1}(Q)\right|\right|.$$

(2) 设 σ 为连接 p 和 q 的分段光滑曲线. 若 σ 包含于 $D_\delta(p)$, 由 (1) 可知 $L(\sigma) \geq \left|\exp_p^{-1}(q)\right|$. 若 σ 不完全含于 $D_\delta(p)$, 则 σ 与 $\partial D_\delta(p)$ 相交, 设交点为 q'. 将 σ 连接 p 和 q' 的一段记为 σ_1, 则有 $L(\sigma) \geq L(\sigma_1) \geq \delta \geq |\exp_p^{-1}(q)|$. 无论哪种情况, 都有 $L(\sigma) \geq \left|\exp_p^{-1}(q)\right|$, 因此 $d \geq \left|\exp_p^{-1}(q)\right|$.



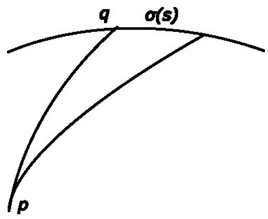
另一方面连接 p 和 q 的径向测地线长度为 $\left|\exp_p^{-1}(q)\right|$, 故为最短线.

由于指数映射的光滑性及 T_pM 上的范数 $|\cdot|$ 在 $T_pM \setminus \{0\}$ 上的光滑性, 距离函数

$$d_p : D_\delta(p) \to \mathbb{R}, \quad q \mapsto d(p,q)=\left|\exp_p^{-1}(q)\right|$$

在 $D_\delta(p)\setminus\{p\}$ 上是光滑函数.

设 $q \in D_\delta(p)\setminus\{p\}$, $X \in T_qM$, 取经过 q 且包含于 $D_\delta(p)$ 的曲线, 使得 $\dot\sigma(0)=X$. 由 (1) 中



计算可知,

$$(d_p\circ\sigma)'(0)=\frac{1}{|\exp_p^{-1}(q)|}\langle\dot\sigma(0),\dot\gamma(1)\rangle=\left\langle X,\frac{\dot\gamma(1)}{|\exp_p^{-1}(q)|}\right\rangle.$$

其中 $\gamma(t)=\exp_p\left(t\exp_p^{-1}(q)\right)$ 是连接 p,q 的径向测地线, 于是

$$\nabla d_p(q)=\frac{\dot\gamma(1)}{|\exp_p^{-1}(q)|}.$$

特别地, $|\nabla d_p(q)|=1$.

定义 5.3 (测地球)

设 (M,g) 为黎曼流形, $p\in M$. 以 p 为球心, r 为半径的**测地球**定义为

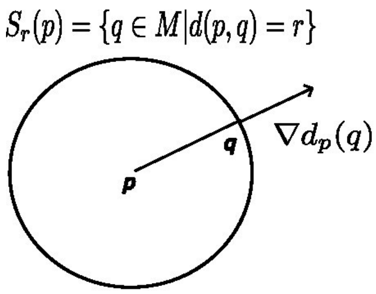
$$B_r(p)=\{q\in M \mid d(p,q)<r\}.$$

测地球的边界 $\partial B_r(p)$ 被称为**测地球面**, 也常记作 $S_r(p)$. ♣

注 测地球的拓扑不一定是球. 若 M 为紧致无边流形, 对于充分大的 r, $B_r(p)=M$. 但对于充分小的 r, 根据引理(5.1)和命题(5.2), $B_r(p)$ 微分同胚于 $B_p(r)$. 由于 $\partial B_r(p)$ 为 d_p 的 r 等值面, 且 $|\nabla d_p|=1$, $\nabla d_p(q)$ 为 $\partial B_r(p)$ 在 q 处的单位外法向量场.

引理 5.2 (高斯引理)

径向测地线与小半径测地球面正交.



5.3 完备性

定义 5.4 (完备黎曼流形)

设 (M,g) 为黎曼流形, d 为诱导距离. 若 (M,d) 是完备的 (即 Cauchy 列均收敛), 则称 (M,g) 为完备黎曼流形.

引理 5.3

设 (M,g) 为完备黎曼流形, 则以下陈述成立:

(1) M 中测地线均可向两端无限延伸, 即测地线方程的解可以延拓至整个 $\mathbb{R}$;

(2) 任给 $p,q\in M$, 均存在最短测地线连接它们.

证明 (1) 设 $\sigma:(a,b)\to M$ 为弧长参数测地线, 且 (a,b) 为测地线方程解的最大存在区间. 我们证明 $(a,b)=(-\infty,+\infty)$. 采用反证法, 不妨设 $b<+\infty$. 由

$$d\left(\sigma(s),\sigma(t)\right)\leq|s-t|$$

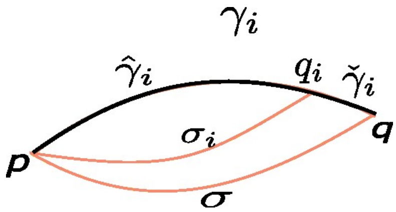
以及 (M,g) 的完备性可知, 当 $t\to b$ 时, $\sigma(t)\to q\in M$. 根据引理5.1 , 存在 $\varepsilon>0$ 及 q 的开邻域 U, 使得当 $p\in U$ 时, 指数映射 $\exp_p:B_p(\varepsilon)\to M$ 为嵌入. 取 $t_0<b$, 使得 $|t_0-b|<\varepsilon/2$, 且 $\gamma(t_0)\in U$, 于是存在测地线 $\tau:[0,\varepsilon)\to M$, 使得 $\tau(0)=\gamma(t_0)$, $\dot\tau(0)=\dot\gamma(t_0)$. 这样, σ 的定义域扩展到 $(a,b+\varepsilon/2)$, 矛盾. 因此 $b=+\infty$, 故 $(a,b)=(-\infty,+\infty)$.

(2) 固定 p, 令

$$R=\sup\left\{r\,\middle|\,\text{当 }d(p,q)<r\text{ 时, 存在最短测地线连接 }p,\ q\right\}.$$

当 q 距离 p 较近时, p,q 间存在最短线, 因此 $R>0$. 我们要证明 $R=\infty$. 采用反证法, 设 $R<\infty$.

先证当 $d(p,q)=R$ 时, 存在最短线连接 p,q. 事实上, 由距离 d 的定义, 存在连接 p,q 的分段光滑曲线 γ_i (以弧长为参数), 使得当 $i\to\infty$ 时, $L(\gamma_i)\searrow R$. 当 i 充分大时, 记 $q_i=\gamma_i\left(R-\frac{1}{i}\right)$, 将 γ 连接 p 和 q_i 的部分记为 $\hat\gamma_i$, 将 γ 连接 q_i 和 q 的部分记为 $\check\gamma_i$, 则有

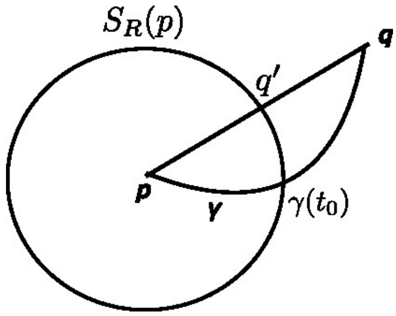


$$d(q_i,q) \le L(\check{\gamma}_i) = L(\gamma_i) - L(\hat{\gamma}_i) = L(\gamma_i) - \left(R - \frac{1}{i}\right) \to 0.$$

同时, $d(p,q_i) \le R - \frac{1}{i}$, 于是存在连接 p, q_i 的最短线 σ_i (弧长参数). 每个 $\dot{\sigma}_i(0)$ 为 T_pM 中的单位向量, 由单位球的紧性, $\dot{\sigma}_i(0)$ 存在收敛子列, 不妨将该收敛子列就设为 $\dot{\sigma}_i(0)$ 本身, 设 $\dot{\sigma}_i(0) \to v$. 根据结论 (1), 存在从 p 出发的测地线 $\sigma : [0,R] \to M$, 使得 $\dot{\sigma}(0) = v$. 根据测地线关于初值的光滑依赖性可知, 在区间 $[0,R]$ 上, $\sigma_i \to \sigma$. 特别地, $\sigma(R) = \lim_{i\to\infty} \sigma_i(R)$. 由于 σ_i 是 1-Lipschitz 映射, 有

$$\lim_{i\to\infty} \sigma_i(R) = \lim_{i\to\infty} \sigma_i\left(d(p,q_i)\right) = \lim_{i\to\infty} q_i = q.$$

也即 $\sigma(R) = q$, 即有最短线连接 p, q. 这同时意味着 $S_R(p) \subset \exp_p(\overline{B_p(R)})$. 显然 $S_R(p)$ 是紧集. 根据引理(5.1)和命题(5.2), 存在 $\varepsilon > 0$, 使得当 $x \in S_R(p)$ 时, 对 $\forall y \in B_\varepsilon(x)$, 有最短测地线连接 x, y.



设 $q \in M$, 且 $d(p,q) < R + \varepsilon$. 我们说明存在最短测地线连接 p, q. 不妨设 $d(p,q) > R$. 因为 $S_R(p)$ 紧, 故存在 $q' \in S_R(p)$, 使得 $d\left(q,q'\right) = d(q, S_R(p))$.

断言: $d(p,q) = d(p,q') + d\left(q, S_R(p)\right)$.

事实上, 任取连接 p, q 的分段光滑曲线 γ, 设 $\gamma(t_0) \in S_R(p)$, 则

$$L(\gamma) \ge d\left(p, \gamma(t_0)\right) + d\left(\gamma(t_0), q\right) \ge R + d\left(q, S_R(p)\right) = R + d(q,q').$$

于是

$$d(p,q) \ge R + d(q',q) = d(p,q') + d(q',q) \ge d(p,q).$$

所有 "$\ge$" 都必须取 "$=$". 特别地, $d(q',q) = d(p,q) - R < \varepsilon$. 从而存在连接 q, q' 的最短线 τ. 取连接 p, q' 的最短线 σ, 则

$$L(\sigma \cup \tau) = L(\sigma) + L(\tau) = d(p,q') + d(q',q) = d(p,q).$$

因此 $\sigma \cup \tau$ 为最短线, 必为最短测地线.

推论 5.1

设 (M,g) 为完备黎曼流形, 任给 $p \in M$, 指数映射 $\exp_p : T_pM \to M$ 是满射. ♡

定理 5.1 (Hopf–Rinow)

设 (M,g) 为黎曼流形, 则以下几条等价:

(1) (M,g) 完备;

(2) 任给 $p\in M$, 指数映射 $\exp_p$ 定义在整个 T_pM 上;

(3) 存在 $p\in M$, 使得 $\exp_p$ 定义在整个 T_pM;

(4) M 中的有界闭集是紧的 (Heine–Borel 性质).

证明 $(1)\Rightarrow(2)$: 已证.

$(2)\Rightarrow(3)$: 显然.

$(3)\Rightarrow(4)$: 由引理5.3的 (2) 的证明, 对 $\forall q\in M$, 均存在连接 p,q 的最短线. 因此, 若 A 为有界闭集, 则存在 $k>0$, 使得

$$A\subset\left\{q\in M\,\middle|\,d(p,q)\le k\right\}\subset\exp_p\left(\left\{w\in T_pM\,\middle|\,|w|\le k\right\}\right).$$

这说明 A 为紧集的闭子集, 从而也是紧的.

$(4)\Rightarrow(1)$: 设 $\{q_i\}$ 是 Cauchy 列, 则其闭包 $\overline{\{q_i\}}$ 是 M 中有界闭集. 按条件, $\overline{\{q_i\}}$ 是紧的, 从而是列紧的, 从而 (M,g) 完备.

推论 5.2

紧致无边黎曼流形是完备的.

应用: 若 G 是紧 Lie 群, 则 $\exp:\mathfrak{g}\to G$ 是满射. 在 G 上取双不变度量 g, 则 $\exp_e^g=\exp$.

推论 5.3

设 M 上存在一个逆紧的 Lipschitz 函数 $f:M\to\mathbb{R}$, 则 M 是完备的.

练习 5.1 证明推论5.3.

第 6 章 Jacobi 场及其应用

思考: 完备黎曼流形上任意两点有最短测地线相连. 测地线在局部上是最短线, 在大范围呢?

6.1 Jacobi 场

例 6.1

(1) 欧式空间: 任意测地线都是最短线.

(2) 双曲空间: 任意测地线都是最短线.

(3) 标准球面: 长度超过 π 的测地线不是最短线.

启发:

临界点不一定是最小值点, 局部最小值 $\Rightarrow$ Hessian 半正定 (有限维), 二次变分半正定 (无限维).

前面结果中测地线局部最短的"局部": 指数映射为微分同胚的像集内 $\Rightarrow$ 考虑指数映射的切映射.

设 (M,g) 为黎曼流形, $p\in M$, v, $w\in T_pM$, 则 $\xi(s)=v+sw$ 是 T_pM 中从 v 出发的曲线, $\dot{\xi}(s)=w$. 由切映射的定义,

$$(\exp_p)_{*v}(w)=\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\exp_p(\xi(s))=\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\exp_p(v+sw).$$

若 $w=\lambda v$, 记 $\gamma(t)=\exp_p(tv)$, 则 $\exp_p(v+sw)=\exp_p((1+\lambda s)v)=\gamma(1+\lambda s)$.

$$(\exp_p)_{*v}(w)=\frac{d}{ds}\bigg|_{s=0}\gamma(1+\lambda s)=\lambda\dot{\gamma}(1).$$

即沿着径向 $d\exp_p$ 是保长的.

另一种看法: $\exp_p(\xi(s))$ 为一族测地线的终点, 考虑这一族测地线的变分向量场. 令

$$\gamma:[0,1]\times[0,\varepsilon]\to M,\quad (t,s)\to\exp_p[t(\xi(s))].$$

记 $T(t,s)=\frac{\partial\gamma}{\partial t}$, $U(t,s)=\frac{\partial\gamma}{\partial s}$, 则

$$\nabla_TU-\nabla_UT=[T,U]=\gamma_*\big([\frac{\partial}{\partial s},\frac{\partial}{\partial t}]\big).$$

再记 $U(t)=U(t,0)$, 则

$$(\exp_p)_{*v}(w)=U(1).$$

U 称为 **Jacobi 场**, 接下来看 $U(t)$ 关于 t 的变化规律. 记 $\dot{U}=\nabla_{\dot{\gamma}}U$, $\ddot{U}=\nabla_{\dot{\gamma}}\nabla_{\dot{\gamma}}U$.

命题 6.1

$U(t)$ 满足以下方程及初始条件:

$$\ddot{U}(t)-R\left(\dot{\gamma}(t),U(t)\right)\dot{\gamma}(t)=0,\quad U(0)=0,\quad \dot{U}(0)=w.$$

证明 由 $\gamma(0,s)\equiv p$ 知 $U(0,s)=\frac{\partial\gamma}{\partial s}(0,s)=0$. 特别地, $U(0)=0$.

$$\dot{U}(0)=\nabla_TU|_{(0,0)}=\nabla_UT|_{(0,0)}=\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0}\xi(s)=w.$$

对于每个固定的 s, $\gamma_s(t)=\gamma(t,s)$ 均为测地线, 因此 $\nabla_T T=0$. 于是有

$$\nabla_T\nabla_T U=\nabla_T\nabla_U T=\nabla_T\nabla_U T-\nabla_U\nabla_T T-\nabla_{[T,U]}T=R(T,U)T.$$

将上式限制在 γ 上, 得

$$\ddot{U}(t)-R\left(\dot{\gamma}(t),U(t)\right)\dot{\gamma}(t)=0.$$

此方程称为 **Jacobi** 方程, 可视作测地线方程的线性化.

注 $\nabla_U T|_{(0,0)}$ 是关于曲线 γ 的拉回丛 γ^*TM 的诱导联络. 具体内容参见梅加强《黎曼几何》1.1 节"几何的基本概念".

设 $U(t)$ 是沿着 γ 的 Jacobi 场. 在 $T_{\gamma(0)}M$ 处取标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^n$, 使得 $e_n=\frac{\dot{\gamma}(0)}{|\dot{\gamma}(0)|}$. 以 e_i 为初值得到沿 γ 的平行向量场记为 $e_i(t)$, 则 $e_n(t)=\frac{\dot{\gamma}(t)}{|\dot{\gamma}(t)|}$. 根据平行移动的性质 $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$ 是 $T_{\gamma(t)}M$ 的一组标准正交基. 设 $U(t)=\sum_{i=1}^n f_i(t)e_i(t)$, 则

$$\dot{U}(t)=\sum_{i=1}^n \dot{f}_i(t)e_i(t),\quad \ddot{U}(t)=\sum_{i=1}^n \ddot{f}_i(t)e_i(t).$$

Jacobi 方程可以写为

$$\ddot{f}_i(t)-\sum_{j=1}^{n-1}R_{ninj}(\gamma(t))\cdot f_j(t)=0,\quad i=1,\cdots,n.$$

命题 6.2

设 $\gamma:[a,b]\to M$ 为测地线.

(1) 给定 $w\in T_pM$, 存在唯一的沿 γ 的 Jacobi 场 U 使得 $U(0)=0,\dot{U}=w$.

(2) 设 U 是沿 γ 的 Jacobi 场, 则 U 的零点是离散的.

(3) 设 U 是沿 γ 的 Jacobi 场, 则存在常数 a,b 使得

$$U(t)=U^{\perp}(t)+(at+b)\dot{\gamma}(t),$$

其中 $U^{\perp}$ 也是沿 γ 的 Jacobi 场, 且 $\left\langle U^{\perp}(t),\dot{\gamma}(t)\right\rangle\equiv 0$. $U^{\perp}(t)$ 称为**正常 Jacobi 场**或**法 Jacobi 场**.

(4) 设 U 是沿 γ 的 Jacobi 场, 若存在 $t_1\neq t_2$, 使得

$$\langle U(t_1),\dot{\gamma}(t_1)\rangle=\langle U(t_2),\dot{\gamma}(t_2)\rangle=0,$$

则 $U(t)$ 是正常 Jacobi 场.

(5) 设 U 是沿 γ 的 Jacobi 场, 若存在 t_0 使得

$$\langle U(t_0),\dot{\gamma}(t_0)\rangle=\left\langle \dot{U}(t_0),\dot{\gamma}(t_0)\right\rangle=0,$$

则 $U(t)$ 是正常 Jacobi 场.

证明 (1) 线性 ODE 初值问题解的存在唯一性.

(2) 反证法. 若 t_0 为 U 的零点集的聚点, 则 $U(t_0)=\dot{U}(t_0)=0$. 则由 (1), $U(t)\equiv 0$.

(3) 由 Jacobi 方程, $\ddot{f}_n(t)=0\Rightarrow f_n(t)=a_0t+b_0$. 于是

$$U(t)=\sum_{i=1}^{n-1}f_i(t)e_i(t)+f_n(t)e_n(t)=U^{\perp}(t)+(at+b)\dot{\gamma}(t).$$

其中, $a=\frac{a_0}{|\dot{\gamma}(t)|}$, $b=\frac{b_0}{|\dot{\gamma}(t)|}$, 仍为常数. $U^{\perp}$ 垂直于 $\dot{\gamma}(t)$, 由于 U 和 $(at+b)\dot{\gamma}(t)$ 满足 Jacobi 方程, $U^{\perp}$ 也满足 Jacobi 方程.

(4) 由 (3) 可知, 此时 $\langle U(t),\dot\gamma(t)\rangle=at+b$ 存在两个零点, 因此 $a=b=0$. 即 $U(t)=U^\perp(t)$ 为正常 Jacobi 场.

(5) 由 (3) 可知

$$\dot U(t)=\nabla_{\dot\gamma(t)}U^\perp(t)+a\dot\gamma(t).$$

另一方面, 有

$$\langle\nabla_{\dot\gamma(t)}U^\perp(t),\dot\gamma(t)\rangle=\langle U^\perp(t),\dot\gamma(t)\rangle'=0.$$

于是

$$\langle\dot U(t),\dot\gamma(t)\rangle=a|\dot\gamma(t)|^2.$$

因此, 当 $\dot U(t_0)\perp\dot\gamma(t_0)$ 时, $a=0$, 若再有 $U(t_0)\perp\dot\gamma(t_0)$, 则 $b=0$.

命题 6.3

设 $v,w\in T_pM$, $\gamma(t)=\exp_p(tv)$.

(1) (Guass 引理) 设 $v\perp w$, 则 $(\exp_p)_{*v}(w)\perp\dot\gamma(1)$.

(2) $d\exp_p$ 在 $v\in T_pM$ 处退化当且仅当在 γ 上存在不恒为零的正常 Jacobi 场, 使得该 Jacobi 场在 p 和 $q=\exp_p(v)$ 处为零.

证明

(1) 变分 $\gamma(t,s)=\exp_p(t(v+sw))$ 决定了 γ 上的 Jacobi 场 U, 它满足条件

$$U(0)=0,\quad \dot U(0)=w,\quad U(1)=(\exp_p)_{*v}(w),$$

由 $w\perp v$ 可知 $\dot U(0)\perp\dot\gamma(0)$, 再由 $U(0)=0$ 可知 U 为正常 Jacobi 场, 特别地, $U(1)\perp\dot\gamma(1)$, 即 $(\exp_p)_{*v}(w)\perp\dot\gamma(1)$.

(2) 设 $d\exp_p$ 在 $v\in T_pM$ 处退化, 则存在 $w\in T_pM$, $w\neq 0$, 使得 $(\exp_p)_{*v}(w)=0$. 于是变分 $\gamma(t,s)=\exp_p(t(v+sw))$ 决定的 Jacobi 场 U 满足

$$U(0)=0,\quad \dot U(0)=w,\quad U(1)=(\exp_p)_{*v}(w)=0.$$

根据命题6.2的 (4), $U(t)$ 为正常 Jacobi 场, 且 $U(t)$ 不恒为零.

反之, 设 $U(t)$ 是沿 γ 的正常 Jacobi 场, $U(0)=U(1)=0$. 记 $w=\dot U(0)$. 因为 $U(t)$ 不恒为零, 所以 $w\neq 0$. 考虑变分 $\gamma(t,s)=\exp_p(t(v+sw))$, 它决定了 γ 上的 Jacobi 场 $\tilde U(t)$, $\tilde U(t)$ 满足

$$\tilde U(0)=0,\quad \dot{\tilde U}(0)=w\neq 0,\quad \tilde U(1)=(\exp_p)_{*v}(w).$$

根据 Jacobi 场的唯一性, $\tilde U=U$. 特别地,

$$(\exp_p)_{*v}(w)=\tilde U(1)=U(1)=0.$$

即 $d\exp_p$ 在 v 处退化.

定义 6.1 (共轭点)

若 $d\exp_p$ 在 $v\in T_pM$ 处退化, 则称 $q=\exp_p(v)$ 是 p 沿着测地线 $\gamma(t)=\exp_p(tv)$ 的共轭点.

注 共轭点是相互的. 若 $d\exp_p$ 在 $v\in T_pM$ 处退化, 则存在沿着 γ 的不恒为零的正常 Jacobi 场 U, 使得 $U(0)=U(1)=0$. 令 $\bar\gamma(t)=\gamma(1-t)$, $\bar U(t)=U(1-t)$, 则 $\bar U$ 是沿着 $\bar\gamma$ 的 Jacobi 场, 且在 p 和 q 处为零, 有命题6.3的 (2), $d\exp_q$ 在 $-\dot\gamma(1)$ 处退化. 故 p 也是 q 的共轭点.

6.2 Jacobi 场的应用

6.2.1 Cartan–Hadamard 定理

定理 6.1 (Cartan–Hadamard 定理)

设 (M,g) 为完备黎曼流形.

(1) 若 M 的截面曲率非正, 则任给 $p\in M$, $\exp_p$ 无共轭点.

(2) 若 M 单连通且截面曲率非正, 则任给 $p\in M$, $\exp_p: T_pM\to M$ 为微分同胚.

♡

证明

(1) 设 $\gamma:[0,\infty)\to M$ 为从 p 出发的任意正规测地线. 只需说明沿 γ 的初值为零的正常 Jacobi 场无其他零点. 反证法, 设 $U(t)$ 是一个有其他零点的 Jacobi 场, 令 $f(t)=\langle U(t),U(t)\rangle$, 则

$$\dot f=\nabla_{\dot\gamma(t)}\langle U(t),U(t)\rangle=2\big\langle\dot U(t),U(t)\big\rangle,$$

$$\begin{aligned}\ddot f(t)&=2\nabla_{\dot\gamma(t)}\big\langle\dot U,U(t)\big\rangle\\&=2\big\langle\ddot U,U\big\rangle+2|\dot U(t)|^2\\&=2|\dot U|^2+2\langle R(\dot\gamma,U)\dot\gamma,U\rangle\\&=2|\dot U|^2-2K(\dot\gamma\wedge U)|\dot\gamma\wedge U|^2\\&=2|\dot U|^2-2K(\dot\gamma\wedge U)|U|^2\geq 0.\end{aligned}$$

于是 $f(t)$ 为凸函数. 注意 $f\geq 0$ 且 $f(0)=0$. 若 $f(t_0)=0$, 则 f 在 $[0,t_0]$ 内恒为零, 这与 $\ddot f(0)=2|\dot U(0)|^2>0$ 矛盾.

(2) 由 (1) 知 $\exp_p$ 处处非退化, 为浸入. 记 $\tilde g=\exp_p^*g$ 为 T_pM 上的拉回度量. 于是

$$\exp_p:(T_pM,\tilde g)\to(M,g)$$

为等距浸入. 易见从 $0\in T_pM$ 出发的射线 $\xi(t)=tv$ $(v\in T_pM)$ 均为 $(T_pM,\tilde g)$ 的测地线. 这些测地线可以无限延长, 由 Hopf–Rinow 定理可知 $(T_pM,\tilde g)$ 为完备黎曼流形. 根据下面引理, 可知 $\exp_p:T_pM\to M$ 为覆盖映射. 由于 M 单连通, 此覆盖映射为微分同胚.

定义 6.2 (覆盖映射)

设 X' 和 X 为拓扑空间, $\varphi: X'\to X$ 为连续满射, 且对任意 $p\in X$, 存在 p 的开邻域 U, 使得 $\varphi^{-1}(U)=\sqcup_{i\in I}U_i$ (不交并), 且每个 U_i 是开集, $\varphi|_{U_i}\to U$ 是同胚. 则称 X' 是 X 的覆盖空间, φ 为覆盖映射.

♣

引理 6.1

设 $\varphi:(M',g')\to(M,g)$ 是相同维数的黎曼流形间的等距浸入, 若 (M',g') 完备, 则 (M,g) 也是完备的, 且 φ 是覆盖映射.

♡

6.2.2 法坐标系 (正规坐标系)

设 (M,g) 为黎曼流形, $p\in M$, 在 T_pM 中取标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^n$, 则 T_pM 中的向量 v 可以写成 $v=\sum_{i=1}^n x^i(v)e_i$, $x^i(v)\in\mathbb{R}$. $\{x^i\}_{i=1}^n$ 称为 T_pM 上由 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 决定的欧氏坐标. 又因为当 $\delta>0$ 很小时, $\exp_p: B_p(\delta)\to B_\delta(p)$ 为微分同胚, 故 $\{x^i\}_{i=1}^n$ 也可视为 $B_\delta(p)$ 中的局部坐标系.

根据定义: 对固定的 $(x^1,\cdots,x^n)$, 从 p 出发的曲线 $\gamma(t)=(tx^1,\cdots,tx^n)$ 均为测地线 (这是因为 $\exp(tv)$ 为 M 中测地线, $v=\sum_{i=1}^n x^ie_i\in T_pM$).

考虑测地线的变分 $\gamma(t,s)=(tx^1,\cdots,t(x^i+s),\cdots,tx^n)$, 此变分在 $\gamma(t)$ 上的变分向量场为

$$U_i(t)=\frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0}\gamma(t,s)=t\frac{\partial}{\partial x^i}.$$

$U_i(t)$ 是沿 $\gamma(t)$ 的 Jacobi 场, 满足初始条件: $U_i(0)=0, \dot U_i(0)=\frac{\partial}{\partial x^i}=e_i$.

在坐标系 $\{x^i\}_{i=1}^n$ 中, 黎曼度量 g 可以表示为 $g=g_{ij}dx^i\otimes dx^j$, 其中 $g_{ij}=\langle\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}\rangle$. 沿着径向测地线 $\gamma(t)=tx$, g_{ij} 可以写成

$$g_{ij}(tx)=\left\langle\frac{\partial}{\partial x^i}\bigg|_{tx},\frac{\partial}{\partial x^j}\bigg|_{tx}\right\rangle=t^{-2}\left\langle U_i(t),U_j(t)\right\rangle. \tag{6.1}$$

令 $f(t)=\langle U_i(t),U_j(t)\rangle$. 则有 $f(0)=0$, 且有

$$\begin{aligned}
f'(0)&=\big\langle\dot U_i(0),U_j(0)\big\rangle+\big\langle U_i(0),\dot U_j(0)\big\rangle=0,\\
f''(0)&=\big\langle\ddot U_i(0),U_j(0)\big\rangle+\big\langle U_i(0),\ddot U_j(0)\big\rangle+2\big\langle\dot U_i(0),\dot U_j(0)\big\rangle=2\big\langle e_i,e_j\big\rangle=\delta_{ij},\\
f'''(0)&=\big\langle\dddot U_i(0),U_j(0)\big\rangle+\big\langle U_i(0),\dddot U_j(0)\big\rangle+3\big\langle\dot U_i(0),\ddot U_j(0)\big\rangle+3\big\langle\ddot U_i(0),\dot U_j(0)\big\rangle=0.
\end{aligned}$$

上式用到了 $\ddot U_i(0)=R(\dot\gamma(0),U_i(0))\dot\gamma(0)=0$. 继续求导, 有

$$\begin{aligned}
f^{(4)}&=\big\langle U_i^{(4)}(0),U_j(0)\big\rangle+\big\langle U_i(0),U_j^{(4)}(0)\big\rangle+4\big\langle\dddot U_i(0),\dot U_j(0)\big\rangle+4\big\langle\dot U_i(0),\dddot U_j(0)\big\rangle+6\big\langle\ddot U_i(0),\ddot U_j(0)\big\rangle\\
&=4\big\langle\dddot U_i(0),\dot U_j(0)\big\rangle+4\big\langle\dot U_i(0),\dddot U_j(0)\big\rangle.
\end{aligned}$$

对 Jacobi 方程

$$\ddot U_i(t)=R(\dot\gamma(t),U_i(t))\dot\gamma(t)$$

两端关于 $\gamma'(t)$ 求协变导数, 可得

$$\begin{aligned}
\dddot U_i(t)&=(\nabla R)(\dot\gamma(t),U_i(t),\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))+R(\ddot\gamma(t),U_i(t))\dot\gamma(t)\\
&\quad+R(\dot\gamma(t),\dot U_i(t))\dot\gamma(t)+R(\dot\gamma(t),U_i(t))\ddot\gamma(t)\\
&=(\nabla R)(\dot\gamma(t),U_i(t),\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))+R(\dot\gamma(t),\dot U_i(t))\dot\gamma(t).
\end{aligned}$$

因此 $\dddot U_i(0)=R(\dot\gamma(0),\dot U_i(0))\dot\gamma(0)$, $f^{(4)}(0)=8R(\dot\gamma(0),\dot U_i(0),\dot\gamma(0),\dot U_j(0))$. 代入(6.1), 可得

$$\begin{aligned}
g_{ij}(tx)&=\frac{1}{2}f''(0)+\frac{1}{24}f^{(4)}(0)t^2+O(t^3)\\
&=\delta_{ij}+\frac{1}{3}R(x,e_i,x,e_j)t^2+O(t^3).
\end{aligned}\tag{6.2}$$

将 tx 当成 x, (6.2)也可以写成

$$g_{ij}(x)=\delta_{ij}+\frac{1}{3}R_{kilj}x^kx^l+O(|x|^3).$$

这说明对任意 i,j,k, 有 $\Gamma_{ij}^k(0)=0$.

由初等公式

$$\sqrt{\det(I+tB)}=1+\frac{1}{2}(\operatorname{tr}B)t+O(t^2),$$

可得

$$\sqrt{G(x)}=\sqrt{\det(g_{ij}(x))}=1-\frac{1}{6}R_{kl}(0)x^kx^l+O(|x|^3).$$

可以进一步估计测地球的体积

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(B_r(p)) &= \int_{|x|<r} \sqrt{G(x)}\, dx^1 \cdots dx^n \\
&= \int_{|x|<r} \left(1 - \frac{1}{6} R_{kl}(0) x^k x^l + O(|x|^3)\right) dx^1 \cdots dx^n \\
&= \int_{|x|<r} \left(1 - \frac{1}{6} R_{kk}(0) (x^k)^2 + O(|x|^3)\right) dx^1 \cdots dx^n \\
&= \int_{|x|<r} \left(1 - \frac{1}{6n} \Big(\sum_{k=1}^n R_{kk}(0)\Big) |x|^2 + O(|x|^3)\right) dx^1 \cdots dx^n \\
&= \int_{|x|<r} \left(1 - \frac{S(0)}{6n} |x|^2 + O(|x|^3)\right) dx^1 \cdots dx^n \\
&= n\omega_n \int_0^r \left(1 - \frac{S(0)}{6n} s^2 + O(s^3)\right) s^{n-1}\, ds \\
&= \omega_n r^n \left(1 - \frac{S(0)}{6(n+2)} r^2 + O(r^3)\right).
\end{aligned}$$

6.2.3 单连通空间形式的唯一性

设 (M,g) 截面曲率为常数 k, 则

$$R(X,Y,Z,W) = k(\langle X,W\rangle \langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle \langle Y,W\rangle),$$

也即

$$R(X,Y)Z = k\left(\langle Y,Z\rangle X - \langle X,Z\rangle Y\right).$$

设 γ 为 M 中正规测地线. U 是沿着 γ 的正常 Jacobi 场且 $U(0)=0$. 则 U 满足

$$\ddot{U} = R(\dot\gamma, U)\dot\gamma = k\big(\langle U,\dot\gamma\rangle \dot\gamma - \langle \dot\gamma,\dot\gamma\rangle U\big) = -kU. \tag{6.3}$$

设 $l(t)$ 为沿着 γ 平行的向量场, 且 $l(0)=\dot{U}(0)$. 设 $f(t)$ 满足

$$\ddot{f}(t) + kf(t) = 0, \quad f(0)=0, \quad f'(0)=1. \tag{6.4}$$

则 $f(t)l(t)$ 满足(6.3), 且初值与 U 相同. 根据 Jacobi 场的唯一性, 可知 $U(t)=f(t)l(t)$.

方程(6.4)的解称为**广义正弦函数**, 表达式为

$$\mathrm{sn}_k(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{k}} \sin\left(\sqrt{k}t\right), & k>0, \\ t, & k=0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{-k}} \sinh\left(\sqrt{-k}t\right), & k<0, \end{cases}$$

其中

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

对于单位球面: $\mathrm{sn}(t) = \sin t$, $U(\pi)=0$, 即南北极互为共轭点. 而 $\mathbb{R}^n$ 和 $\mathbb{H}^n$ 中任一点无共轭点.

定义 6.3 (空间形式)

连通完备常曲率黎曼流形称为**空间形式**. ♣

由于 $K_{\lambda g} = \frac{1}{\lambda} K_g$, 因此常曲率空间的曲率可以通过放缩度量规范为 $1, -1, 0$.
已知的单连通的空间形式有: $\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n$. 还有其他的吗?

定理 6.2 (单连通空间形式的唯一性)

设 (M, g) 和 $(\bar{M}, \bar{g})$ 为相同维数的单连通完备黎曼流形. 若 (M, g) 和 $(\bar{M}, \bar{g})$ 的截面曲率为相同的常数 k, 则存在等距同构 $\varphi : \bar{M} \to M$.

证明 先考虑 $k \leq 0$ 的情形. 任取 $p \in M$ 及 $\bar{p} \in \bar{M}$, 取一个保内积线性同构 $I : T_{\bar{p}}\bar{M} \to T_pM$. 根据 Cartan–Hadamard 定理, 指数映射 $\exp_p : T_pM \to M$ 和 $\exp_{\bar{p}} : T_{\bar{p}}\bar{M} \to \bar{M}$ 均为微分同胚. 定义映射 $\varphi : \bar{M} \to M$ 为 $\varphi = \exp_p \circ I \circ \exp_{\bar{p}}^{-1}$, 即下面交换图成立:

$$\begin{tikzcd}
T_{\bar{p}}\bar{M} \arrow[r, "I"] & T_pM \arrow[d, "\exp_p"] \\
\bar{M} \arrow[u, "\exp_{\bar{p}}^{-1}"] \arrow[r, "\varphi"] & M
\end{tikzcd}$$

显然 φ 为微分同胚. 为了说明 φ 为等距同构, 只需说明 $d\varphi$ 保持向量长度 (保长必保内积). 注意到 $\varphi(\bar{p}) = p$. 由于指数映射在零向量处的切映射为恒同映射, $d\varphi$ 在 $\bar{p}$ 处保内积.

设 $\bar{\gamma}(t) = \exp_{\bar{p}}(t\bar{v})$ 为 $\bar{M}$ 中从 $\bar{p}$ 出发的正规测地线. 记 $v = I(\bar{v}), \gamma(t) = \exp_p(tv)$. 由 φ 的定义可得 $\varphi \circ \bar{\gamma}(t) = \gamma(t), \forall t \geq 0$. 特别地, $d\varphi(\dot{\bar{\gamma}}(t)) = \dot{\gamma}(t)$, 因而 $d\varphi$ 在径向保长. 在 $T_{\bar{p}}\bar{M}$ 中任取 $\bar{e} \perp \bar{v}$, 记 $e = I(\bar{e})$. 令 $\bar{\gamma}(t, s) = \exp_{\bar{p}}[t(\bar{v} + s\bar{e})], \gamma(t, s) = \exp_p[t(v + se)]$. 由 φ 的定义可得 $\varphi \circ \bar{\gamma}(t, s) = \gamma(t, s)$. 上式关于 s 求导得

$$d\varphi\left(\bar{U}(t)\right) = U(t).$$

其中 $\bar{U}(t) = \frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0}\bar{\gamma}(t, s), U(t) = \frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0}\gamma(t, s)$. 易见 $\bar{U}(t), U(t)$ 均为 Jacobi 场, 分别满足条件: $\bar{U}(0) = 0, \dot{\bar{U}}(0) = \bar{e}, U(0) = 0, \dot{U} = e$. 根据空间形式中 Jacobi 场的讨论可知

$$|\bar{U}(t)| = \mathrm{sn}_k(t)|\bar{e}| = \mathrm{sn}_k(t)|e| = |U(t)|.$$

这说明 $d\varphi$ 在法向是保长的. 这就完成了对 $k \leq 0$ 的证明.

下面考虑 $k > 0$ 的情形. 通过对黎曼度量加以伸缩, 不妨设 $k = 1$. 并且不妨设 $\bar{M} = \mathbb{S}^n$. 任取 $x \in \mathbb{S}^n$, 对径点 $-x$ 记为 $\bar{x}$. 任取 $p \in M$, 并取保内积线性同构 $I : T_x\mathbb{S}^n \to T_pM$, 考虑如下交换图:

$$\begin{tikzcd}
T_x\mathbb{S}^n \arrow[r, "I"] & T_pM \arrow[d, "\exp_p"] \\
\mathbb{S}^n \setminus \{\bar{x}\} \arrow[u, "\exp_x^{-1}"] \arrow[r, "\varphi"] & M
\end{tikzcd}$$

其中 $\varphi = \exp_p \circ I \circ \exp_x^{-1}$. 类似 $k \leq 0$ 情形的讨论, 可知 $d\varphi$ 保内积, φ 为等距浸入.

下面将 φ 延拓到整个 $\mathbb{S}^n$ 上. 为此, 取 $y \in \mathbb{S}^n \setminus \{x, \bar{x}\}$, 记 $\bar{y} = -y, q = \varphi(y)$. 定义

$$\psi : \mathbb{S}^n \setminus \{\bar{y}\} \to M, \quad \psi = \exp_q \circ \varphi_{*y} \circ \exp_y^{-1}.$$

即下面的交换图成立:

$$\begin{tikzcd}
T_y\mathbb{S}^n \arrow[r, "\varphi_{*y}"] & T_qM \arrow[d, "\exp_q"] \\
\mathbb{S}^n \setminus \{\bar{y}\} \arrow[u, "\exp_y^{-1}"] \arrow[r, "\psi"] & M
\end{tikzcd}$$

由于 φ_{*y} 保内积, 由类似上文的分析, 可知 ψ 也为等距浸入. 由引理6.2, 可知在 $\mathbb{S}^n \setminus \{\bar{x}, \bar{y}\}$ 上, $\varphi = \psi$. 令 $\varphi(\bar{x}) = \psi(\bar{x})$, 则扩充定义后的 φ 是从 $\mathbb{S}^n$ 到 M 的等距浸入. 根据引理6.1, φ 为覆盖映射. 由 M 单连通知 φ 为微分同胚, 从而是等距同构.

引理 6.2

设 $f_1, f_2 : M \to N$ 是两个相同维数的黎曼流形 (不一定完备) 之间的等距浸入. 若存在一点 $p \in M$ 使得 $f_1(p) = f_2(p)$ 且 $df_1(p) = df_2(p)$, 则 $f_1 = f_2$.

✍ **练习 6.1** 证明双曲空间是完备的.

✍ **练习 6.2** 证明引理6.2.

第 7 章 二次变分公式及其应用

测地线是长度泛函的临界点, 局部上为最短线, 太长了则不一定. 如何判断一段测地线是否为最短线? 一个必要条件是长度的二阶变分非负.

7.1 二次变分公式

设 (M,g) 为黎曼流形, 考虑一族变分曲线 $\gamma:[a,b]\times(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$, $\gamma_s(t)=\gamma(t,s)$, 其中 $\gamma_0(t)=\gamma(0,t)$ 称为基曲线. 记 $L(s)=L(\gamma_s)$ 为曲线 γ_s 的长度. 令

$$T(t,s)=\frac{\partial\gamma}{\partial t}(t,s),\quad U(t,s)=\frac{\partial\gamma}{\partial s}(t,s),$$

则 $[T,U]=0$. 从而有

$$\begin{aligned}L'(s)&=\frac{d}{ds}\int_a^b|T(t,s)|\,dt=\int_a^b\frac{1}{|T|}\langle T,\nabla_U T\rangle\,dt\\&=\int_a^b\frac{1}{|T|}\langle T,\nabla_T U\rangle\,dt.\end{aligned}$$

接着计算其二阶导数, 有

$$\begin{aligned}L''(s)&=\frac{d}{ds}\int_a^b\frac{1}{|T|}\langle T,\nabla_T U\rangle\,dt\\&=\int_a^b\left[-\frac{1}{|T|^3}\langle T,\nabla_T U\rangle^2+\frac{1}{|T|}|\nabla_T U|^2+\frac{1}{|T|}\langle T,\nabla_U\nabla_T U\rangle\right]dt\\&=\int_a^b\left[-\frac{1}{|T|^3}\big(T\langle T,U\rangle-\langle U,\nabla_T T\rangle\big)^2+\frac{1}{|T|}|\nabla_T U|^2\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{|T|}\langle T,R(U,T)U\rangle+\frac{1}{|T|}\langle T,\nabla_T\nabla_U U\rangle\right]dt\\&=\int_a^b\left[-\frac{1}{|T|^3}\big(T\langle T,U\rangle-\langle U,\nabla_T T\rangle\big)^2+\frac{1}{|T|}|\nabla_T U|^2\right.\\&\qquad\left.+\frac{1}{|T|}\langle T,R(U,T)U\rangle+\frac{1}{|T|}T\langle T,\nabla_U U\rangle-\frac{1}{|T|}\langle\nabla_T T,\nabla_U U\rangle\right]dt\end{aligned}$$

设 γ_0 为正规测地线. 令 $U(t)=U(t,0)$. 当 $s=0$ 时, 利用 $T=\dot\gamma_0(t)$, $|T|=|\dot\gamma_0(t)|=1$ 以及 $\nabla_T T=\nabla_{\dot\gamma_0(t)}\dot\gamma_0(t)=0$, 可得

$$L''(0)=\langle\dot\gamma_0,\nabla_U U\rangle\big|_a^b+\int_a^b\left[|\dot U|^2-\big(\langle\dot\gamma_0,U\rangle'\big)^2+R(\dot\gamma_0,U,\dot\gamma_0,U)\right]dt.$$

上式称为**二次变分公式**.

注

(1) $\langle\dot\gamma_0,\nabla_U U\rangle\big|_a^b$ 称为边界项. 若 γ 为定端变分, 即 $\gamma(a,s)\equiv\gamma_0(a)$, $\gamma(b,s)\equiv\gamma_0(b)$, 边界项为零. 若变分端点在两条测地线上, 即 $\gamma(a,s)$, $\gamma(b,s)$ 关于 s 为测地线, 则边界项也为零.

(2) $U(t)$ 称为 γ_0 上的变分向量场或横截向量场. 一般来说, $U(t)$ 沿 $\dot\gamma_0$ 方向的分量对 γ_0 仅起到重新参数化的作用, 不影响弧长. 因此, 只要考虑 $U(t)$ 的垂直分量, 记

$$U(t)=U^\perp(t)+f(t)\dot\gamma_0(t).$$

两边关于 $\dot\gamma_0(t)$ 求协变导数, 由 $\ddot\gamma_0(t)=0$ 可得

$$\dot U(t)=\nabla_{\dot\gamma_0(t)}U^{\perp}(t)+f'(t)\dot\gamma_0(t).$$

另一方面, 有

$$\left\langle\nabla_{\dot\gamma_0(t)}U^{\perp}(t),\dot\gamma_0(t)\right\rangle=\left\langle U^{\perp}(t),\dot\gamma_0(t)\right\rangle'=0.$$

因此, $\dot U^{\perp}(t)=\nabla_{\dot\gamma_0(t)}U^{\perp}(t)$. 进而有

$$|\dot U|^2-(\langle\dot\gamma_0,U\rangle')^2=|\dot U^{\perp}|^2+(f')^2-(f')^2=|\dot U^{\perp}|^2.$$

同时, 有

$$R\left(\dot\gamma_0,U,\dot\gamma_0,U\right)=R\left(\dot\gamma_0,U^{\perp},\dot\gamma_0,U^{\perp}\right).$$

于是第二变分公式可以写成

$$L''(0)=\langle\dot\gamma_0,\nabla_U U\rangle\Big|_a^b+\int_a^b\left[|\dot U^{\perp}|^2+R(\dot\gamma_0,U^{\perp},\dot\gamma_0,U^{\perp})\right]dt. \tag{7.1}$$

类似地, 有 $\ddot U^{\perp}(t)=\nabla_{\dot\gamma_0(t)}\dot U^{\perp}(t)$. 利用等式 $\langle\dot U^{\perp},\dot U^{\perp}\rangle=\langle U^{\perp},\dot U^{\perp}\rangle'-\langle\ddot U^{\perp},U^{\perp}\rangle$, (7.1)式还可以写成

$$L''(0)=\left(\langle\dot\gamma_0,\nabla_U U\rangle+\langle\dot U^{\perp},U^{\perp}\rangle\right)\Big|_a^b-\int_a^b\left\langle\ddot U^{\perp}-R(\dot\gamma_0,U^{\perp})\dot\gamma_0,U^{\perp}\right\rangle dt.$$

若 $U^{\perp}(t)$ 为沿 γ_0 的正常 Jacobi 场, 则

$$L''(0)=\left(\langle\dot\gamma_0,\nabla_U U\rangle+\langle\dot U^{\perp},U^{\perp}\rangle\right)\Big|_a^b.$$

7.2 二次变分公式的应用

定义 7.1 (直径)

设 (M,g) 为黎曼流形, 定义 M 的直径为

$$d(M)=\sup\left\{d(x,y)\,|\,x,\,y\in M\right\}.$$

♣

若 M 完备, $d(M)<\infty\Leftrightarrow M$ 紧致.

定理 7.1 (Bonnet–Myers 定理)

设 (M,g) 为完备黎曼流形. 若其 Ricci 曲率 $\geq(n-1)k$, k 为正常数, 则 M 为紧流形, 且直径 $d(M)\leq\frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

♡

证明 在 M 上任取两点 $p\neq q$, 我们证明 $d(p,q)\leq\frac{\pi}{\sqrt{k}}$. 因为 M 完备, 可以用最短正规测地线 $\sigma:[0,l]\to M$ 连接 p 和 q, 其中 $l=d(p,q)$. 沿着 σ 取一组平行标准正交向量场 $\{e_i(t)\}_{i=1}^n$, 使得 $e_n(t)=\dot\sigma(t)$. 考虑沿 $\sigma(t)$ 的向量场 $E_i(t)=f(t)e_i(t)$, $i=1,2,\cdots,n-1$. 其中 $f(t)$ 为待定函数, 满足 $f(0)=f(l)=0$. 以 $E_i(t)$ 做 σ 的如下变分:

$$\gamma_i(t,s)=\exp_{\sigma(t)}[sE_i(t)].$$

由 $f(0)=f(l)=0$ 知 γ_i 是定端变分. 且 $\frac{\partial\gamma_i}{\partial s}(t,s)\Big|_{s=0}=E_i(t)$. 记

$$L_i(s)=\int_0^l|\dot\gamma_i(t,s)|\,dt.$$

由弧长的二次变分公式可得

$$L_i''(0) = \int_0^l \left[(f')^2 + f^2 R(\dot\sigma, e_i, \dot\sigma, e_i)\right] dt.$$

再由 $\mathrm{Ric}(\dot\sigma,\dot\sigma) \geq (n-1)k$ 可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n-1} L_i''(0) &= \int_0^l \left[(n-1)f'^2 - f^2\,\mathrm{Ric}(\dot\sigma,\dot\sigma)\right] dt \\ &\leq (n-1)\int_0^l \left(f'^2 - kf^2\right) dt.\end{aligned}$$

取 $f(t) = \sin\left(\frac{\pi}{l}t\right)$, 代入可得

$$\sum_{i=1}^{n-1} L_i''(0) \leq \frac{n-1}{2}\left[\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 - k\right] l.$$

由于 σ 是连接 p, q 的最短测地线, 故 $L_i''(0) \geq 0$. 于是

$$\frac{\pi}{l} \geq \sqrt{k} \Rightarrow l \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}.$$

即 $d(p,q) \leq \frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

思考: 若 $d(M) = \frac{\pi}{\sqrt{k}}$, (M,g) 要满足什么条件? 显然, 需要 $\mathrm{Ric}(\dot\sigma(t),\dot\sigma(t)) \equiv (n-1)k$, 除此之外呢?

推论 7.1

设 (M,g) 为完备黎曼流形, 若 M 的 Ricci 曲率有正下界, 则 M 的基本群是有限群.

证明 记 M 的万有覆盖为 $\tilde M$, $\phi: \tilde M \to M$ 为覆盖映射, 记 $\tilde g = \phi^* g$ 为 $\tilde M$ 的拉回度量. 则 $(\tilde M, \tilde g)$ 仍为完备黎曼流形 (测地线经提升后仍为测地线). 并且, ϕ 为局部等距, 因此 $(\tilde M, \tilde g)$ 的 Ricci 曲率仍有正下界. 根据 Bonnet–Myers 定理, $\tilde M$ 紧致, 从而 ϕ 为有限覆盖, 即 $\pi_1(M)$ 为有限群.

定理 7.2 (Synge 定理)

设 (M^n, g) 为完备黎曼流形, 其截面曲率有正下界. 即 $K_M \geq a > 0$, a 为常数.

(1) 当 n 为偶数时, 若 M 可定向, 则 M 单连通; 若 M 不可定向, 则 $\pi_1(M) = \mathbb{Z}_2$.

(2) 当 n 为奇数时, M 可定向.

第 8 章 Rauch 比较定理

未来三章, 我们将学习一系列比较定理. 将黎曼流形与标准空间 $(\mathbb{S}^n, \mathbb{R}^n, \mathbb{H}^n)$ 相比较:

$$\text{逐点曲率比较} \xrightarrow{\text{“积分”}} \text{大范围几何比较}$$

$$K \geq a, \mathrm{Ric} \geq (n-1)a \xrightarrow{\text{Jacobi 场}} \text{距离函数的 Hessian, 距离函数的 Laplace, 体积.}$$

工具: ODE 的比较定理 (Sturm 比较定理)

本章, 我们学习 Rauch 比较定理.

8.1 Rauch 比较定理

设 (M^n, g) 为黎曼流形, $\gamma : [0, l] \to M$ 为正规测地线, 取 $T_{\gamma(0)}M$ 的一组标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^n$, 其中 $e_n = \dot{\gamma}(0)$. 将 $\{e_i\}$ 沿 γ 平行移动得到向量场 $\{e_i(t)\}$, 显然 $e_n(t) = \dot{\gamma}(t)$.

设 $U_i(t)$ 是沿 $\gamma(t)$ 的正常 Jacobi 场, 满足初始条件

$$U_i(0) = 0, \quad \dot{U}_i(0) = e_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

在标准正交基 $\{e_i(t)\}_{i=1}^{n-1}$ 下, $U_i(t)$ 可以表示为

$$U_i(t) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}(t) e_j(t), \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

由 Jacobi 方程可得

$$\ddot{A}(t) + A(t)K(t) = 0.$$

其中, $A(t) = (a_{ij}(t))$, $K(t) = (K_{ij}(t))$, $K_{ij}(t) = R(\dot{\gamma}(t), e_i(t), e_j(t), \dot{\gamma}(t))$.

命题 8.1

$A(t_0)$ 可逆当且仅当 $\gamma(t_0)$ 不是 $\gamma(0)$ 沿 γ 的共轭点.

证明 事实上, 若 $A(t_0)$ 不可逆, 则存在一组不全为 0 的数 $(c_1, \cdots, c_{n-1})$, 使得

$$(c_1, \cdots, c_{n-1})A(t_0) = (0, \cdots, 0).$$

此时, 非平凡 Jacobi 场 $U(t) = \sum_{i=1}^{n-1} c_i U_i(t)$ 在 $t = 0, t_0$ 处为 0. 这说明 $\gamma(t_0)$ 是 $\gamma(0)$ 的共轭点. 反过来自行验证.

假设 γ 不含 $\gamma(0)$ 的共轭点, 令 $\mathrm{II}(t) = A^{-1}(t)\dot{A}(t)$, 则有

$$\begin{aligned}
\dot{\mathrm{II}}(t) &= \left(A^{-1}(t)\right)' \dot{A}(t) + A^{-1}(t)\ddot{A}(t) \\
&= -\left(A^{-1}(t)\dot{A}(t)A^{-1}(t)\right)\dot{A}(t) - A^{-1}(t)A(t)K(t) \\
&= -\mathrm{II}^2(t) - K(t).
\end{aligned}$$

引理 8.1

(1) 当 $t \to 0^+$ 时, $\mathrm{II}(t) = \dfrac{1}{t} I_{n-1} + O(t)$.

(2) $\mathrm{II}(t)$ 为对称方阵.

证明

(1) 由 $U_i(0)=0, \dot{U}_i(0)=e_i$ 可知, $A(0)=0, \dot{A}(0)=I_{n-1}$, 带入方程得 $\ddot{A}(0)=0$. 令

$$B(t)=\begin{cases} I_{n-1}, & t=0 \\ \dfrac{A(t)}{t}, & t>0. \end{cases}$$

则

$$\dot{B}(0)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(\frac{A(t)}{t}-I_{n-1}\right)=\frac{1}{2}\ddot{A}(0)=0.$$

进而有

$$\begin{aligned} \mathrm{I\!I}(t)&=\frac{1}{t}B^{-1}(t)\left[B(t)+t\dot{B}(t)\right] \\ &=\frac{1}{t}I_{n-1}+B^{-1}(t)\dot{B}(t) \\ &=\frac{1}{t}I_{n-1}+O(t). \end{aligned}$$

(2) 有矩阵关系

$$\left(\langle\dot{U}_i,U_j\rangle\right)_{(n-1)\times(n-1)}=\dot{A}\cdot A^{\mathrm{T}}.$$

利用 Jacobi 方程

$$\begin{aligned} \left(\langle\dot{U}_i,U_j\rangle-\langle U_i,\dot{U}_j\rangle\right)'&=\langle\ddot{U}_i,U_j\rangle-\langle U_i,\ddot{U}_j\rangle \\ &=R(\dot{\gamma},U_i,\dot{\gamma},U_j)-R(\dot{\gamma},U_j,\dot{\gamma},U_i) \\ &=0. \end{aligned}$$

即

$$(\dot{A}A^{\mathrm{T}}-A\dot{A}^{\mathrm{T}})'=0.$$

因此

$$\dot{A}(t)A^{\mathrm{T}}(t)-A(t)\dot{A}^{\mathrm{T}}(t)=\dot{A}(0)A^{\mathrm{T}}(0)-A(0)\dot{A}^{\mathrm{T}}(0)=0.$$

即

$$\dot{A}(t)A^{\mathrm{T}}(t)=A(t)\dot{A}^{\mathrm{T}}(t).$$

两边左乘 $A^{-1}(t)$ 并右乘 $(A^{\mathrm{T}}(t))^{-1}$, 即可得 $\mathrm{I\!I}(t)=\mathrm{I\!I}^{\mathrm{T}}(t)$.

引理 8.2

设 $K(t),\bar{K}(t)$ 为连续函数, $f(t),\bar{f}(t)$ 分别满足方程

$$\begin{aligned} f''(t)+f(t)K(t)=0, &\quad f(0)=0, \quad f'(0)=1. \\ \bar{f}''(t)+\bar{f}(t)\bar{K}(t)=0, &\quad \bar{f}(0)=0, \quad \bar{f}'(0)=1. \end{aligned}$$

记 $T_0,\bar{T}_0\le+\infty$ 分别为 $f(t)$ 和 $\bar{f}(t)$ 的最小正零点. 若 $K(t)\ge\bar{K}(t)$, 则 $T_0\le\bar{T}_0$, 且 $f(t)\le\bar{f}(t), t\in[0,T_0]$.

证明 直接计算有

$$\left[f'(t)\bar{f}(t)-\bar{f}'(t)f(t)\right]'=\left[\bar{K}(t)-K(t)\right]f(t)\bar{f}(t).$$

令 $T=\min\{T_0,\bar{T}_0\}$. 则 $f(t),\bar{f}(t)$ 在 $(0,T)$ 为正. 此时

$$f'(t)\bar{f}(t)-\bar{f}'(t)f(t)\leq f'(0)\bar{f}(0)-\bar{f}'(0)f(0)=0$$

即

$$\frac{f'(t)}{f(t)}\leq\frac{\bar{f}'(t)}{\bar{f}(t)},$$

也即 $\left(\ln\frac{f}{\bar{f}}\right)'\leq 0$. 因此,

$$\frac{f(t)}{\bar{f}(t)}\leq\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t)}{\bar{f}(t)}=\lim_{t\to 0^+}\frac{f'(t)}{\bar{f}'(t)}=1.$$

即 $f(t)\leq\bar{f}(t)$ 在 $[0,T]$ 中成立. 这说明当 f 为正时, $\bar{f}$ 也为正. 于是 $T_0\leq\bar{T}_0$, 且 $f(t)\leq\bar{f}(t)$ 在 $[0,T_0]$ 中成立.

定义 8.1

设 C,D 为 n 阶对称矩阵. 若 C 的最小特征值不小于 D 的最大特征值, 即 $\min\lambda(C)\geq\max\lambda(D)$, 则记作 $C\gg D$. ♣

此条件等价于: 对任意单位向量 $x,y\in\mathbb{R}^n$, 有 $x^TCx\geq y^TDy$; 或者等价地, 对任意正交矩阵 O, 有 $OCO^{\mathrm{T}}\geq D$.

引理 8.3

设 $K(t),\bar{K}(t)$ 为 $n-1$ 阶连续对称方阵, $A(t),\bar{A}(t)$ 为 n 阶 C^2 连续方阵, 且满足

$$\ddot{A}(t)+A(t)K(t)=0,\quad A(0)=0,\quad \dot{A}(0)=I_{n-1};$$
$$\ddot{\bar{A}}(t)+\bar{A}(t)\bar{K}(t)=0,\quad \bar{A}(0)=0,\quad \dot{\bar{A}}(0)=I_{n-1}.$$

若 $K(t)\gg\bar{K}(t)$, 则 $A(t)$ 在 $(0,T_0]$ 可逆时, $\bar{A}(t)$ 也在 $(0,T_0]$ 中可逆, 且

$$A^{-1}(t)\dot{A}(t)\gg\bar{A}^{-1}(t)\dot{\bar{A}}(t),\quad\forall t\in[0,T_0]$$

♡

证明 定义 $T=\sup\{t>0\,|\,A和\bar{A}在(0,t)中可逆\}$. 根据初始条件, $T>0$. 当 $t\in(0,T)$ 时, 令 $\mathrm{I\!I}(t)=A^{-1}(t)\dot{A}(t)$, $\bar{\mathrm{I\!I}}(t)=\bar{A}^{-1}(t)\dot{\bar{A}}(t)$. 根据引理8.1的证明, $\mathrm{I\!I}(t)$ 和 $\bar{\mathrm{I\!I}}(t)$ 是对称的. 进一步, 有

$$\begin{aligned}\left[\bar{A}(\mathrm{I\!I}-\bar{\mathrm{I\!I}})\bar{A}^{\mathrm{T}}\right]'&=\dot{\bar{A}}(\mathrm{I\!I}-\bar{\mathrm{I\!I}})\bar{A}^{\mathrm{T}}+\bar{A}(\dot{\mathrm{I\!I}}-\dot{\bar{\mathrm{I\!I}}})\bar{A}^{\mathrm{T}}+\bar{A}(\mathrm{I\!I}-\bar{\mathrm{I\!I}})(\bar{A}^{\mathrm{T}})'\\&=\bar{A}\bar{\mathrm{I\!I}}(\mathrm{I\!I}-\bar{\mathrm{I\!I}})\bar{A}^{\mathrm{T}}+\bar{A}(-\mathrm{I\!I}^2-K+\bar{\mathrm{I\!I}}^2+\bar{K})\bar{A}^{\mathrm{T}}+\bar{A}(\mathrm{I\!I}-\bar{\mathrm{I\!I}})\bar{\mathrm{I\!I}}\bar{A}^{\mathrm{T}}\\&=-\bar{A}\left[\left(\mathrm{I\!I}-\bar{\mathrm{I\!I}}\right)^2+\left(K-\bar{K}\right)\right]\bar{A}^{\mathrm{T}}\leq 0.\end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned}\bar{A}(t)\left(\mathrm{I\!I}(t)-\bar{\mathrm{I\!I}}(t)\right)\bar{A}^{\mathrm{T}}(t)&\leq\varliminf_{t\to 0^+}\bar{A}(t)\left(\mathrm{I\!I}(t)-\bar{\mathrm{I\!I}}(t)\right)\bar{A}^{\mathrm{T}}(t)\\&=\varliminf_{t\to 0^+}\bar{A}(t)O(t)\bar{A}^{\mathrm{T}}(t)=0.\end{aligned}$$

从而当 $t\in(0,T)$ 时, $\mathrm{I\!I}(t)\leq\bar{\mathrm{I\!I}}(t)$.

对任意固定正交阵 O, 考虑 $O\bar{A}O^{\mathrm{T}}$ 所满足的方程, 由条件 $K(t)\geq O\bar{K}(t)O^{\mathrm{T}}$ 可得 $\mathrm{I\!I}(t)\leq O\bar{\mathrm{I\!I}}(t)O^{\mathrm{T}}, t\in(0,T)$, 即

$$\mathrm{I\!I}(t)\ll\bar{\mathrm{I\!I}}(t),\quad t\in(0,T).\tag{8.1}$$

任取单位向量 $x\in\mathbb{R}^{n-1}$, 记 $f(t)=x^{\mathrm{T}}A(t)A^{\mathrm{T}}(t)x$, 则

$$f'(t)=x^{\mathrm{T}}\left(\dot{A}A^{\mathrm{T}}+A(A^{\mathrm{T}})'\right)x=2x^{\mathrm{T}}A\,\mathrm{I\!I}\,A^{\mathrm{T}}x.$$

任取单位向量 $y\in\mathbb{R}^{n-1}$, 记 $\bar{f}(t)=y^{\mathrm{T}}\bar{A}(t)\bar{A}^{\mathrm{T}}(t)y$, 则

$$\bar{f}'(t)=2y^{\mathrm{T}}\bar{A}\bar{\mathrm{I\!I}}\bar{A}^{\mathrm{T}}y.$$

由公式 (8.1) 可知,

$$\frac{f'(t)}{f(t)}\le\frac{\bar{f}'(t)}{\bar{f}(t)},\quad t\in(0,T).$$

即

$$\left(\ln\frac{f(t)}{\bar{f}(t)}\right)'\le 0,\quad t\in(0,T).$$

从而有

$$\frac{f(t)}{\bar{f}(t)}\le\lim_{t\to0^+}\frac{f(t)}{\bar{f}(t)}=\lim_{t\to0^+}\frac{x^{\mathrm{T}}\dot{A}(0)\dot{A}^{\mathrm{T}}(0)x+O(t^2)}{y^{\mathrm{T}}\dot{\bar{A}}(0)\dot{\bar{A}}^{\mathrm{T}}(0)y+O(t^2)}=\frac{|x|^2}{|y|^2}=1.$$

也就有

$$AA^{\mathrm{T}}\ll\bar{A}\bar{A}^{\mathrm{T}},\quad t\in(0,T).$$

因此结论成立.

定理 8.1 (Rauch 比较定理)

设 (M,g) 和 $(\bar{M},\bar{g})$ 为黎曼流形, $\gamma:[0,l]\to M$, $\bar{\gamma}:[0,l]\to\bar{M}$ 分别为 M, $\bar{M}$ 上的正规测地线, $U(t)$, $\bar{U}(t)$ 分别为沿 $\gamma,\bar{\gamma}$ 的 Jacobi 场, 且满足条件

$$|U(0)|=|\bar{U}(0)|=0,\quad\langle\dot{U}(0),\dot{\gamma}(0)\rangle=\langle\dot{\bar{U}}(0),\dot{\bar{\gamma}}(0)\rangle,\quad|\dot{U}(0)|=|\dot{\bar{U}}(0)|.$$

记 $k(t)=\min\left\{K_g(\dot{\gamma}(t),v)\,\middle|\,v\perp\dot{\gamma}(t)\right\}$, $\bar{k}(t)=\max\left\{K_{\bar{g}}(\dot{\bar{\gamma}}(t),v)\,\middle|\,v\perp\dot{\bar{\gamma}}(t)\right\}$. 假设

(1) γ 无共轭点,

(2) $k(t)\ge\bar{k}(t)$, $\forall t\in[0,l]$.

则有

(a) $\bar{\gamma}$ 也无共轭点,

(b) $|U(t)|\le|\bar{U}(t)|$, $\forall t\in[0,l]$.

证明 我们给出证明的要点, 细节请在练习中补全.

(a) 沿用之前记号, 令 $K(t)=(R(\dot{\gamma}(t),e_i(t),e_j(t),\dot{\gamma}(t)))$, 相应地定义 $\bar{K}(t)$. 则 $k(t)=\lambda_{\min}(K(t))$, $\bar{k}(t)=\lambda_{\max}\left(\bar{K}(t)\right)$. 根据假设, $\bar{K}(t)\gg K(t)$. 由引理 8.3, $\bar{\gamma}$ 不含共轭点.

(b) 正交分解.

定理 8.2 (Rauch 比较定理的其他形式)

在 Rauch 比较定理的条件下, 记 $\gamma(t)=\exp_p(tv)$, $\bar{\gamma}(t)=\exp_{\bar{p}}(t\bar{v})$, 设 $X\in T_pM$, $\bar{X}\in T_{\bar{p}}\bar{M}$. 若

$$\langle X,v\rangle=\langle\bar{X},\bar{v}\rangle,\quad|X|=|\bar{X}|,$$

则

$$|(\exp_p)_{*lv}(X)|\le|(\exp_{\bar{p}})_{*l\bar{v}}(\bar{X})|.$$

证明 根据指数映射和 Jacobi 场的关系知，存在沿 γ 的 Jacobi 场 $U(t)$，使得 $U(0)=0,\dot{U}(0)=X$, $U(l)=l(\exp_p)_{*lv}(X)$. 同理，存在沿 $\bar{\gamma}$ 的 Jacobi 场 $\bar{U}(t)$，使得 $\bar{U}(0)=0$, $\dot{\bar{U}}(0)=X$, $\bar{U}(l)=l(\exp_{\bar{p}})_{*l\bar{v}}(\bar{X})$.

✍ **练习 8.1** 补全定理8.1的证明细节.

✍ **练习 8.2** 补全定理8.2的证明细节.

8.2 Rauch 比较定理的应用

推论 8.1

设 $k>0$, M 是截面曲率 $K_M\le k$ 的完备黎曼流形. 则对任意 $p\in M$，当 $r\le\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ 时，$\exp_p: B_p(r)\to M$ 为浸入. ♡

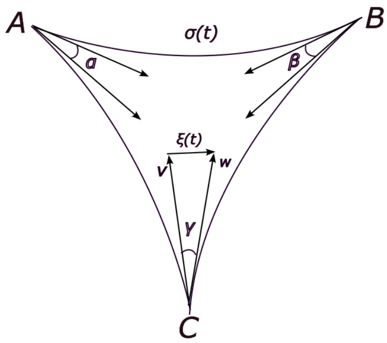
证明 $\mathbb{S}^n(\frac{1}{\sqrt{k}})$ 长度小于 $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ 的测地线不含共轭点. 根据 Rauch 比较定理，M 中长度小于 $\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ 的测地线也不含共轭点，即 $\exp_p$ 在 $B_r(p)$ 上非退化.

推论 8.2

设 M 为曲率非正的单连通完备黎曼流形 (称为 Cartan–Hadamard 流形). $\triangle ABC$ 为 M 中测地三角形 (三边为最短测地线)，其三内角分别为 α,β,γ，对应的三边长分别为 a,b,c，则

$$c^2\ge a^2+b^2-2ab\cos\gamma,\quad \alpha+\beta+\gamma\le\pi.$$

♡



证明 由于 M 曲率非正，根据 Cartan–Hadamard 定理，指数映射为微分同胚. 记

$$v=\exp_C^{-1}(A),\quad w=\exp_C^{-1}(B),\quad \xi(t)=\exp_C^{-1}(\sigma(t)),$$

其中 σ 是连接 A,B 的最短测地线. 有

$$\begin{aligned}
L(\sigma)&=\int_0^{L(\sigma)}|\sigma'(t)|\,dt\\
&=\int_0^{L(\sigma)}\left|\frac{d}{dt}\exp_C^g(\xi(t))\right|dt\\
&=\int_0^{L(\sigma)}\left|(\exp_C^g)_{*\xi(t)}(\xi'(t))\right|dt\\
&\ge\int_0^{L(\sigma)}\left|(\exp_0^{g_E})_{*\xi(t)}(\xi'(t))\right|dt\\
&=\int_0^{L(\sigma)}|\xi'(t)|\,dt=L(\xi)\ge|v-w|.
\end{aligned}$$

根据欧氏空间中的余弦定理, 有

$$|v-w|^2=|v|^2+|w|^2-2|v||w|\cos\gamma=a^2+b^2-2ab\cos\gamma.$$

因此有

$$c^2\geq a^2+b^2-2ab\cos\gamma,\quad \gamma\leq\arccos\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

对 α,β 也有类似结果, 最终可得

$$\alpha+\beta+\gamma\leq\pi.$$

第 9 章 Hessian 比较定理

标准空间上距离函数:

$$\mathbb{R}^n: \ d(x,0)=|x|.$$

$$\mathbb{S}^n: \ d(x,N)=\arccos(x^{n+1}).$$

$$\mathbb{H}^n: \ g=\frac{4}{(1-|x|^2)^2}g_{\text{Euc}}, \ d(x,0)=\int_0^{|x|}\frac{2}{1-s^2}\,ds=\ln\frac{1+|x|}{1-|x|}.$$

9.1 距离函数的基本性质

命题 9.1

设 (M,g) 为完备黎曼流形, $p\in M$. 若 q 为距离函数 d_p 的可微点, 则存在唯一的最短测地线连接 p 和 q.

证明 显然 $p\neq q$. 设 $\sigma(s)$ 为从 q 出发的正规测地线, 由三角不等式可得

$$d_p(\sigma(s))\le d_p(\sigma(0))+d(\sigma(0),\sigma(s))\le d_p(\sigma(0))+s.$$

这说明

$$\langle\nabla d_p,\dot\sigma(0)\rangle=\left.\frac{d}{ds}\right|_{s=0}d_p((\sigma(s))\le 1.$$

由 σ 的任意性知 $|\nabla d_p|\le 1$.

另一方面, 以最短测地线连接 p,q, 其中 $l=d(p,q)$. 则

$$d_p(\gamma(t))=d(\gamma(0),\gamma(t))=t,\quad \forall t\in[0,l].$$

这说明 $\langle\nabla d_p(q),\dot\gamma(l)\rangle=1$. 因此 $\nabla d_p(q)=\dot\gamma(l)$. 若 $\bar\gamma:[0,l]\to M$ 是连接 p 和 q 的另一条最短测地线, 则 $\dot{\bar\gamma}(l)=\nabla d_p(q)=\dot\gamma(l)$, 由测地线关于初值的唯一性知 $\bar\gamma=\gamma$.

命题 9.2

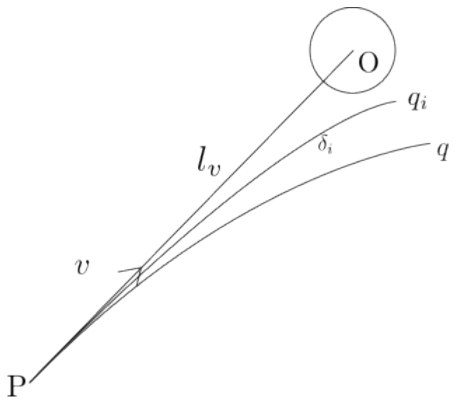
设 (M,g) 为完备黎曼流形, $\gamma:[0,l]\to M$ 为正规测地线, 记 $p=\gamma(0)$, $q=\gamma(l)$. 若 γ 是连接 p 和 q 的唯一最短测地线, 且 q 不是 p 沿 γ 的共轭点, 则距离函数 d_p 在 q 附近是光滑的.

证明 记 $v=\dot\gamma(0)\in T_pM$. 因为 q 不是 $\exp_p$ 沿 γ 的共轭点, 故 $\left(\exp_p\right)_{*lv}$ 非退化. 由逆映射定理, 存在 lv 在 T_pM 中的开邻域 O, 使得 $\exp_p:O\to M$ 为嵌入.

断言: 存在 $\varepsilon>0$, 使得对于任意 $\bar q\in B_\varepsilon(q)$, 有 $d_p(\bar q)=\left|(\exp_p|_O)^{-1}(\bar q)\right|$, 则可知 d_p 在 $B_\varepsilon(q)$ 中是光滑的. 用反证法, 假设存在一列点 $q_i\to q$, 且 $d\left(p,q_i\right)<\left|(\exp_p|_O)^{-1}(q_i)\right|$. 以最短正规测地线 $\sigma_i:[0,l_i]\to M$ 连接 p,q_i, 其中 $l_i=d\left(p,q_i\right)\to l$. 由单位球面的紧性, $\{\dot\sigma_i(0)\}$ 存在收敛子列, 不妨设 $\dot\sigma_i(0)\to w\in T_pM$. 记 $\sigma(t)=\exp_p(tw)$, 由测地线关于初值的光滑依赖性可知 $\sigma:[0,l]\to M$ 也是连接 p,q 的最短测地线. 由题设可得 $\sigma=\gamma$, 即 $w=v$. 于是, 当 i 充分大时, $l_i\dot\sigma_i(0)\in O$. 由

$$|l_i\dot\sigma_i(0)|=d\left(p,q_i\right)<\left|(\exp_p|_O)^{-1}(q_i)\right|,$$

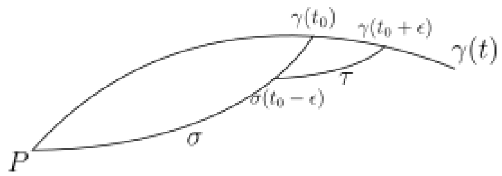
可知 $l_i\dot\sigma_i(0)\neq(\exp_p|_O)^{-1}(q_i)$, 这与 $\exp_p:O\to M$ 为嵌入相矛盾.



命题 9.3

设 (M,g) 为完备黎曼流形, $\gamma:[0,l]\to M$ 为最短正规测地线, 记 $p=\gamma(0)$. 则当 $t_0\in(0,l)$ 时, $\gamma|_{[0,t_0]}$ 是连接 p 与 $\gamma(t_0)$ 的唯一最短测地线, 且 $\gamma(t_0)$ 不是 p 沿 γ 的共轭点, 从而距离函数 d_p 在 $\gamma(t_0)$ 附近是光滑的.

证明 (i) 先说明 $\gamma|_{[0,t_0]}$ 是连接 $p=\gamma(0)$ 与 $\gamma(t_0)$ 的惟一最短测地线. 使用反证法, 设 $\sigma:[0,t_0]\to$



M 是连接 $p=\gamma(0)$ 与 $\gamma(t_0)$ 的另一最短测地线, 且 $\dot\sigma(t_0)\neq\dot\gamma(t_0)$. 取充分小的 $\varepsilon<0$, 以最短测地线 τ 连接 $\sigma(t_0-\varepsilon)$ 和 $\gamma(t_0+\varepsilon)$, 则

$$L(\tau)<L\left(\sigma|_{[t_0-\varepsilon,t_0]}\right)+L\left(\gamma|_{[t_0,t_0+\varepsilon]}\right)$$

考虑连接 $p=\gamma(0)$ 与 $\gamma(l)$ 的如下分段光滑曲线

$$\bar\gamma=\sigma|_{[0,t_0-\varepsilon]}\cup\tau\cup\gamma|_{[t_0+\varepsilon,l]},$$

其长度为 $L(\bar\gamma)<L(\gamma)$, 这与假设矛盾.

(ii) $\gamma(t_0)$ 不是 $\gamma(0)$ 沿 γ 的共轭点 (后面有机会再证明).

9.2 Hessian 比较定理

定理 9.1 (Hessian 比较定理)

设 (M,g) 和 $(\bar M,\bar g)$ 为完备黎曼流形, $\gamma:[0,l]\to M$, $\bar\gamma:[0,l]\to\bar M$ 分别为 $M,\bar M$ 上的最短正规测地线. 令 $k(t)=\min\left\{K_g(\dot\gamma(t),v)\,\middle|\,v\perp\dot\gamma(t)\right\}$, $\bar k(t)=\max\left\{K_{\bar g}(\dot{\bar\gamma}(t),v)\,\middle|\,v\perp\dot{\bar\gamma}(t)\right\}$, 记 $p=\gamma(0)$, $\bar p=\bar\gamma(0)$. 设 $k(t)\geq\bar k(t)$, $t\in[0,l]$. 当 $t_0\in(0,l)$ 时, 对于 $X\in T_{\gamma(t_0)}M$ 和 $\bar X\in T_{\bar\gamma(t_0)}\bar M$, 若满足:

$$|X|=|\bar X|,\quad \langle X,\dot\gamma(t_0)\rangle=\left\langle\bar X,\dot{\bar\gamma}(t_0)\right\rangle,$$

则成立

$$\nabla^2d_p(X,X)\leq\nabla^2d_{\bar p}(\bar X,\bar X).$$

证明 由命题9.3, 对于 $t \in (0,l)$, 距离函数 d_p 和 $d_{\bar{p}}$ 分别在 $\gamma(t), \bar{\gamma}(t)$ 附近是光滑的. 根据命题9.1的证明, 有 $\nabla d_p(\gamma(t)) = \dot{\gamma}(t), \nabla d_{\bar{p}}(\bar{\gamma}(t)) = \dot{\bar{\gamma}}(t)$. 因此有

$$\nabla^2 d_p\left(\dot{\gamma}\left(t_0\right), X\right) = \left\langle\nabla_{\dot{\gamma}(t_0)} \nabla d_p, X\right\rangle = \left\langle\nabla_{\dot{\gamma}(t_0)} \dot{\gamma}(t)\big|_{t=t_0}, X\right\rangle = 0. \tag{9.1}$$

同理 $\nabla^2 d_{\bar{p}}\left(\dot{\bar{\gamma}}\left(t_0\right), \bar{X}\right) = 0$. 将 $X, \bar{X}$ 分别做正交分解:

$$X = Y + a\dot{\gamma}\left(t_0\right),\ Y \perp \dot{\gamma}\left(t_0\right); \quad \bar{X} = \bar{Y} + \bar{a}\dot{\bar{\gamma}}\left(t_0\right),\ \bar{Y} \perp \dot{\bar{\gamma}}\left(t_0\right).$$

根据定理条件, 有 $a = \bar{a}$, 且 $|Y| = |\bar{Y}|$. 根据(9.1)式, 有

$$\nabla^2 d_p(X, X) = \nabla^2 d_p(Y, Y), \quad \nabla^2 d_{\bar{p}}(\bar{X}, \bar{X}) = \nabla^2 d_{\bar{p}}(\bar{Y}, \bar{Y}).$$

接下来使用 Rauch 比较定理, 为此, 先将 $\nabla^2 d_p$ 与 $\mathrm{I\!I}$ 联系起来. 回忆 Rauch 比较定理的“环境”: $\{e_i(t)\}_{i=1}^{n-1}$ 是沿 γ 平行的单位正交标架场, $e_n(t) = \dot{\gamma}(t)$. $\{U_i(t)\}_{i=1}^{n-1}$ 是沿 $\gamma(t)$ 的正常 Jacobi 场, 满足初始条件

$$U_i(0) = 0, \quad \dot{U}_i(0) = e_i(0), \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

$U_i(t)$ 表示为

$$U_i(t) = \sum_{j=1}^{n-1} a_{ij}(t) e_j(t), \quad i = 1, 2, \cdots, n-1.$$

由 Jacobi 方程可得

$$\ddot{A}(t) + A(t)K(t) = 0.$$

其中, $A(t) = (a_{ij}(t)), K(t) = (K_{ij}(t)), K_{ij}(t) = R(\dot{\gamma}(t), e_i(t), e_j(t), \dot{\gamma}(t))$. 当 $t \in (0,l)$ 时, 根据命题9.3, A 可逆, 令 $\mathrm{I\!I}(t) = A^{-1}(t)\dot{A}(t)$. 类似地有带 “$-$” 的对象. 根据定理条件, 有 $K(t) \gg \bar{K}(t)$. 再根据 Rauch 比较定理, 有 $\mathrm{I\!I}(t) \ll \bar{\mathrm{I\!I}}(t)$.

设 $Y = \sum_{i=1}^{n-1} b_i e_i(t_0), \bar{Y} = \sum_{i=1}^{n-1} \bar{b}_i \bar{e}_i(t_0)$. 令 $b = (b_1, \cdots, b_{n-1})^{\mathrm{T}}, \bar{b} = (\bar{b}_1, \cdots, \bar{b}_{n-1})^{\mathrm{T}}$. 根据定理条件, 有 $|b| = |\bar{b}|$. 对基底 $\{e_i(t_0)\}_{i=1}^{n-1}$ 展开可得

$$\nabla^2 d_p(Y, Y) = b^{\mathrm{T}}\left(\nabla^2 d_p\left(e_i, e_j\right)\right) b.$$

由

$$\left(U_1, \ldots, U_{n-1}\right) = \left(e_1, \ldots, e_{n-1}\right) A^{\mathrm{T}},$$

可得

$$\left(\nabla^2 d_p\left(e_i, e_j\right)\right) = A^{-1}\left(\nabla^2 d_p\left(U_i, U_j\right)\right)\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1}.$$

另一方面, 有

$$\nabla^2 d_p\left(U_i, U_j\right) = \langle\nabla_{U_i}\dot{\gamma}, U_j\rangle = \langle\nabla_{\dot{\gamma}} U_i, U_j\rangle = \langle\dot{U}_i, U_j\rangle,$$

即

$$\left(\nabla^2 d_p\left(U_i, U_j\right)\right) = \dot{A} \cdot A^{\mathrm{T}}.$$

所以

$$\left(\nabla^2 d_p\left(e_i, e_j\right)\right) = A^{-1} \cdot \dot{A} \cdot A^{\mathrm{T}} \cdot \left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = A^{-1}\dot{A} = \mathrm{I\!I}.$$

综上可得

$$\nabla^2 d_p(X, X) = \nabla^2 d_p(Y, Y) = b^{\mathrm{T}}\, \mathrm{I\!I}\, b.$$

同理,

$$\nabla^2 d_{\bar{p}}(\bar{X}, \bar{X}) = \nabla^2 d_{\bar{p}}(\bar{Y}, \bar{Y}) = \bar{b}^{\mathrm{T}} \bar{\mathrm{I\!I}} \bar{b}.$$

因为 $|b| = |\bar{b}|$, 由 Rauch 比较定理, $b^{\mathrm{T}}\, \mathrm{I\!I}\, b \leq \bar{b}^{\mathrm{T}} \bar{\mathrm{I\!I}} \bar{b}$, 结论得证.

注 等值面的 Hessian: 设 $(\bar{N},\bar{g})$ 为黎曼流形, $f\in C^\infty(\bar{N})$. 令 $N=f^{-1}(c)$, 设 $\bar{\nabla}f\big|_N$ 处处非零, 则由正则值原像定理, N 为 $\bar{N}$ 的超曲面. 易见 $\nu=\frac{\bar{\nabla}f}{|\bar{\nabla}f|}$ 为 N 的单位法向量场. 对应的第二基本形式为

$$\begin{aligned}\mathrm{II}_\nu(X,Y)&=-\left\langle\bar{\nabla}_X\frac{\bar{\nabla}f}{|\bar{\nabla}f|},Y\right\rangle\\&=-\frac{1}{|\bar{\nabla}f|}\left\langle\bar{\nabla}_X\bar{\nabla}f,Y\right\rangle-X\left(|\bar{\nabla}f|^{-1}\right)\left\langle\bar{\nabla}f,Y\right\rangle\\&=-\frac{1}{|\bar{\nabla}f|}\bar{\nabla}^2f(X,Y).\end{aligned}$$

即

$$\mathrm{II}_{\frac{\bar{\nabla}f}{|\bar{\nabla}f|}}=-\frac{1}{|\bar{\nabla}f|}\bar{\nabla}^2f\big|_{f^{-1}(c)}.$$

对于距离函数, 等值面为测地球面, $|\nabla d|=1$. 等值面的第二基本形式在一组标准正交基下的系数矩阵即为 $-\mathrm{II}$.

9.3 Hessian 比较定理的应用

设 k 为常数, 曲率为 k 的 2 维单连通空间形式记为 M_k^2. 设 $\gamma:[0,l]\to M_k^2$ 为最短正规测地线, 则 $l\le\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ (规定当 $k\le 0$ 时, $\frac{\pi}{\sqrt{k}}=+\infty$). 有

$$\begin{aligned}R\left(\dot\gamma(t),e_i(t),e_j(t),\dot\gamma(t)\right)&=k\left[\langle\dot\gamma(t),\dot\gamma(t)\rangle\langle e_i(t),e_j(t)\rangle-\langle\dot\gamma(t),e_i(t)\rangle\langle\dot\gamma(t),e_j(t)\rangle\right]\\&=k\delta_{ij}.\end{aligned}$$

相应的方程为 $\ddot{A}+kA=0$, $A(0)=0$, $\dot{A}(0)=1$. 解得 $A(t)=\mathrm{sn}_k(t)$, 其中

$$A(t)=\mathrm{sn}_k(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{k}}\sin\left(\sqrt{k}t\right), & k>0,\\ t, & k=0,\\ \dfrac{1}{\sqrt{-k}}\sinh\left(\sqrt{-k}t\right), & k<0.\end{cases}$$

则

$$\dot{A}(t)=\mathrm{cn}_k(t)=\begin{cases}\cos\left(\sqrt{k}t\right), & k>0,\\ 1, & k=0,\\ \cosh\left(\sqrt{-k}t\right), & k<0.\end{cases}$$

因此, $\mathrm{II}(t)=\mathrm{ct}_k(t)$, 其中

$$\mathrm{ct}_k(t)=\begin{cases}\sqrt{k}\cot\left(\sqrt{k}t\right), & k>0,\\ 1, & k=0,\\ \sqrt{-k}\coth\left(\sqrt{-k}t\right), & k<0.\end{cases}$$

所以, 对于 $X\in T_{\gamma(t)}M$ 满足 $X\perp\dot\gamma(t)$, 有

$$\nabla^2 d_{\gamma(0)}(X,X)=\mathrm{ct}_k(t)|X|^2.$$

推论 9.1

设 (M,g) 为完备黎曼流形，截面曲率 $K_M \geq k$. 若 $\gamma:[0,l]\to M$ 为最短正规测地线，则 $l \leq \pi/\sqrt{k}$，且当 $t\in(0,l)$ 时，对任意 $X\in T_{\gamma(t)}M$ 满足 $X\perp\dot\gamma(t)$，有

$$\nabla^2 d_{\gamma(0)}(X,X) \leq \mathrm{ct}_k(t)|X|^2.$$

证明 当 $t_0\in(0,l)$ 时，$\gamma|_{[0,t_0]}$ 是不含共轭点的最短测地线. 根据 Rauch 比较定理，空间形式 M_k^2 中长度为 t_0 的正规测地线也不含共轭点，从而有 $t_0<\pi/\sqrt{k}$. 因为 t_0 任意，$l\leq\frac{\pi}{\sqrt{k}}$. 余下用 Hessian 比较定理.

推论 9.2

设 M^n 为 Cartan–Hadamard 流形，$p\in M$. 则在 $M\setminus\{p\}$ 上，成立

$$\Delta d_p \geq \frac{n-1}{d_p}.$$

若 M^n 的曲率 $K_M\leq -a^2$ (a 为正常数)，则成立

$$\Delta d_p \geq (n-1)a\coth(ad_p).$$

注意到距离函数的 Hessian 在径向有零特征值. 为了方便应用，选择适当的函数 f，使得在空间形式上，$\nabla^2(f\circ d)$ 在各方向的特征值相同. 注意

$$\begin{aligned}\nabla^2(f\circ d)(X,X) &= \langle\nabla_X\nabla(f\circ d),X\rangle = \langle\nabla_X\left(f'(d)\nabla d\right),X\rangle\\ &= f'(d)\langle\nabla_X\nabla d,X\rangle + f''(d)\langle\nabla d,X\rangle^2\\ &= f'(d)\nabla^2 d(X,X)+f''(d)\langle\nabla d,X\rangle^2.\end{aligned}$$

记

$$\mathrm{md}_k(t)=\int_0^t \mathrm{sn}_k(s)\,ds=\begin{cases}\frac12 t^2, & k=0,\\ \frac1k\left(1-\mathrm{cn}_k(t)\right), & k\neq 0.\end{cases}$$

在空间形式 M_k^2 中成立

$$\nabla^2\left(\mathrm{md}_k\circ d\right)=\left(\mathrm{cn}_k\circ d\right)\bar g.$$

推论 9.3

在推论9.1条件下，有

$$\nabla^2\left(\mathrm{md}_k\circ d_p\right)\leq\left(\mathrm{cn}_k\circ d_p\right)g.$$

定理 9.2 (Toponogov 三角形比较定理)

设 (M,g) 为完备黎曼流形，其截面曲率 $K_M\geq k$. 给定 M 上互异三点 p, p_0, p_1，设 $\gamma:[0,l]\to M$ 是连接 p_0 和 p_1 的正规测地线. 若 $0<l<\min\left\{d(p,p_0)+d(p,p_1),\frac{\pi}{\sqrt{k}}\right\}$，则在 M_k^2 中存在 $\bar p$, $\bar p_0$, $\bar p_1$，以及连接 $\bar p_0$, $\bar p_1$ 的最短测地线 $\bar\gamma$，使得 $d(\bar p,\bar p_0)=d(p,p_0)$，$d(\bar p,\bar p_1)=d(p,p_1)$，$L(\bar\gamma)=l$，且

$$d(p,\gamma(t))\geq d(\bar p,\bar\gamma(t)),\quad \forall t\in[0,l].$$

证明 仅给出证明概要. 根据推论9.3，在**闸函数**意义下，成立

$$\nabla^2\left(\mathrm{md}_k\circ d_p\right)\leq\left(\mathrm{cn}_k\circ d_p\right)g.$$

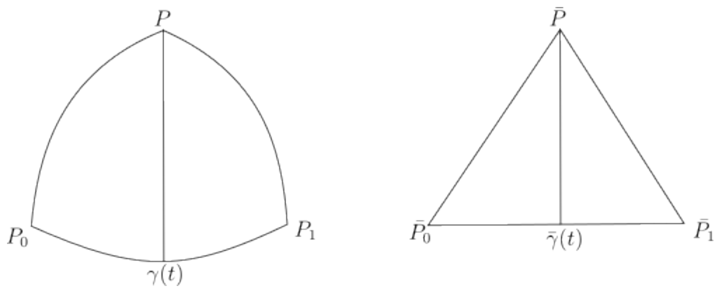


图 9.1: “曲率越大, 测地三角形越胖”

令 $f(t)=\mathrm{md}_k\circ d(p,\gamma(t))$, $\bar{f}(t)=\mathrm{md}_k\circ d(\bar{p},\bar{\gamma}(t))$. 则闸函数意义下, 对于 $t\in(0,l)$, 有

$$f''(t)\leq -kf(t)+1,\quad \bar{f}''(t)=-k\bar{f}(t)+1.$$

且满足边值条件

$$f(0)=\bar{f}(0),\quad f(l)=\bar{f}(l).$$

由 ODE 比较, $f(t)\geq\bar{f}(t)$. 再由 md_k 的单调性, 可知 $d(p,\gamma(t))\geq d(\bar{p},\bar{\gamma}(t))$.

练习 9.1 设 (M,g) 为 Cartan–Hadamard 流形, $p\in M$. 证明: $\nabla^2 d_p^2\geq 2g$.

第 10 章 Laplacian 比较定理、体积比较定理

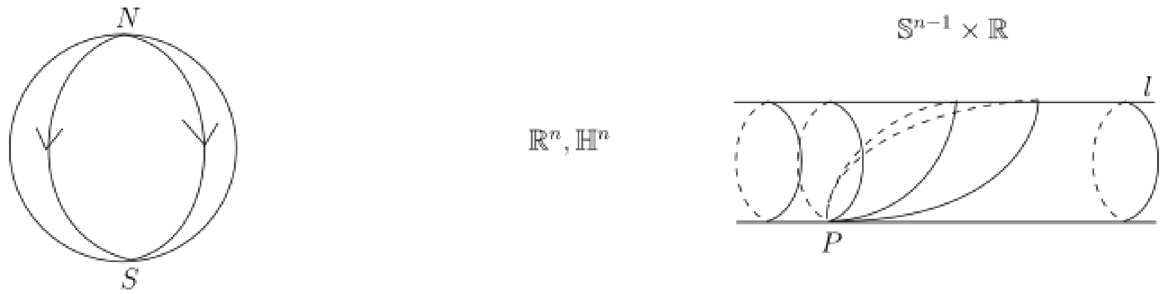
在黎曼流形截面曲率有界的情况下, 我们可以控制距离函数的 Hessian. 在更弱的曲率条件下, 我们能否控制距离函数的 Laplacian?

10.1 Laplacian 比较定理

定义 10.1 (割点 (cut point)、割迹 (cut locus))

设 (M, g) 为完备黎曼流形, $p \in M$. 若 $\gamma : [0, \infty) \to M$ 是从 p 出发的正规测地线, 且 $\gamma|_{[0,t_0]}$ 是最短测地线, 但当 $t > t_0$ 时, $\gamma|_{[0,t]}$ 不再是最短的, 则称 $\gamma(t_0)$ 是 p 沿 γ 的**割点**. 将 p 所有割点组成的集合称为 p 的**割迹**, 记为 $C(p)$. ♣

紧流形任一点都有割点, $\mathbb{S}^n$ 上任一点的割点为其对径点.



$C(N) = S$ $\qquad$ $C(N) = \emptyset$ $\qquad$ $C(N) = l$

命题 10.1

若 $\gamma(t_0)$ 是 $p = \gamma(0)$ 沿 γ 的割点, 下列事实必成立其一:

(i) $\gamma(t_0)$ 是 p 沿 γ 的共轭点;

(ii) 存在另一条连接 p 和 $\gamma(t_0)$ 的最短正规测地线 $\sigma \neq \gamma$. ♠

证明 设 $\gamma(t) = \exp_p(tv)$. 假设 (i) 不成立, 则 $d\exp_p$ 在 $t_0 v$ 处非退化. 根据逆映射定理, 存在 $t_0 v$ 在 T_pM 中的开邻域 O, 使得 $\exp_p : O \to M$ 为嵌入. 记 $t_i = t_0 + 1/i$, 则当 i 充分大时, $t_i v \in O$.

以最短正规测地线 $\sigma_i : [0, l_i] \to M$ 连接 p 和 $\gamma(t_i)$, 其中 $l_i = d(p, \gamma(t_i)) < t_i$ (因为 t_0 为割点). 设 $\sigma_i(t) = \exp_p(tv_i)$, 则 $\exp_p(l_i v_i) = \gamma(t_i) = \exp_p(t_i v)$. 由于 $l_i \neq t_i$, 所以 $l_i v_i \neq t_i v$. 这说明 $l_i v_i \notin O$.

不妨设 $v_i \to w \in T_pM$. 则 $l_i v_i \to t_0 w \notin O$. 于是 $\sigma(t) = \exp_p(tw)$ 是连接 p 和 $\gamma(t_0)$ 的另一条最短正规测地线.

命题 10.2

设 (M, g) 为完备黎曼流形. 则对任意 $p \in M$, $C(p)$ 均为闭的零测集. ♠

设 $p \in M$, 记 $\Sigma_p = \left\{ v \in T_pM \mid d\left(p, \exp_p(v)\right) = |v| \right\}$.

命题 10.3

设 (M,g) 为完备黎曼流形, $p\in M$. 则有

(i) $\exp_p:\mathring{\Sigma}_p\to M$ 为嵌入;

(ii) $M=\exp_p(\Sigma_p)=\exp_p\left(\mathring{\Sigma}_p\right)\cup\exp_p(\partial\Sigma_p)=\exp_p\left(\mathring{\Sigma}_p\right)\cup C(p)$.

证明 (i) 设 $v\in\mathring{\Sigma}_p$, 根据命题9.3, $\gamma(t)=\exp_p(tv)$ 是连接 p 和 $\exp_p(v)$ 的唯一最短测地线, 且 $\exp_p(v)$ 不是 p 沿 γ 的共轭点. 因此, $d\exp_p$ 在 v 处非退化, 且 $\exp_p$ 在 $\mathring{\Sigma}_p$ 中是一一映射. 这说明 $\exp_p:\mathring{\Sigma}_p\to M$ 为嵌入.

(ii) 因为 M 完备, 因此对任意 $q\neq p$, 均存在连接 p,q 的最短测地线 $\gamma:[0,l]\to M$, 其中 $l=d(p,q)$. 这说明 $l\dot{\gamma}(0)\in\Sigma_p$, 因此 $q=\exp(l\dot{\gamma}(0))\in\exp_p(\Sigma_p)$.

注 从拓扑上讲, $\mathring{\Sigma}_p$ 微分同胚于开球. 因此, M 在拓扑上的复杂性主要体现在 $\exp_p\left(\mathring{\Sigma}_p\right)$ 如何与 $C(p)$ 的粘接上.

定义 10.2 (单射半径 (injective radius))

设 (M,g) 为完备黎曼流形, 定义 p 处的**单射半径**为

$$i(p)=\begin{cases}+\infty, & C(p)=\emptyset,\\ \inf\{d(p,q)\,|\,q\in C(p)\}, & C(p)\neq\emptyset.\end{cases}$$

定义 $i(M)=\inf\{\,i(p)\,|\,p\in M\}$.

命题 10.4

设 (M,g) 为完备黎曼流形, $p\in M$. 若存在 $q\in C(p)$, 使得 $i(p)=d(p,q)$, 则下列陈述必成立其一:

(i) q 为 p 的共轭点;

(ii) 存在连接 p 和 q 的两条最短正规测地线 $\sigma,\gamma:[0,l]\to M$, 使得 $\dot{\sigma}(l)=-\dot{\gamma}(l)$.

定理 10.1 (Hessian 比较定理)

设 (M,g) 为完备黎曼流形, $p\in M$.

(i) 若 M 的截面曲率 $K_M\geq k$, 则当 $q\in\exp_p\left(\mathring{\Sigma}_p\right)$ 且 $q\neq p$ 时, 有

$$\nabla^2 d_p(X,X)\leq \mathrm{ct}_k\left(d_p(q)\right)\cdot|X|^2,\quad \forall X\perp\nabla d_p(q).$$

(ii) 若 M 的截面曲率 $K_M\leq k$, 则当 $q\in\exp_p\left(\mathring{\Sigma}_p\right)$, $q\neq p$, 且 $d(p,q)<\pi/\sqrt{k}$ 时, 有

$$\nabla^2 d_p(X,X)\geq \mathrm{ct}_k\left(d_p(q)\right)\cdot|X|^2,\quad \forall X\perp\nabla d_p(q).$$

推论 10.1

设 (M^n,g) 为完备黎曼流形, $p\in M$.

(i) 若 M 的截面曲率 $K_M\geq k$, 则当 $q\in\exp_p\left(\mathring{\Sigma}_p\right)$ 且 $q\neq p$ 时, 有

$$\Delta d_p(q)\leq(n-1)\,\mathrm{ct}_k\left(d_p(q)\right).$$

(ii) 若 M 的截面曲率 $K_M\leq k$, 则当 $q\in\exp_p\left(\mathring{\Sigma}_p\right)$, $q\neq p$, 且 $d(p,q)<\pi/\sqrt{k}$ 时, 有

$$\Delta d_p(q) \geq (n-1)\,\mathrm{ct}_k\,(d_p(q))\,.$$

证明 当 $q \in \exp_p(\mathring{\Sigma}_p)$ 且 $q \neq p$ 时, d_p 在 q 附近是光滑函数.

若只关心 Δd, 可以将曲率条件减弱到 Ricci 曲率.

定理 10.2 (Laplacian 比较定理)

设 (M,g) 为完备黎曼流形, 其 Ricci 曲率满足 $\mathrm{Ric}_M \geq (n-1)k$. 设 $p \in M$, $q \in \exp_p\left(\mathring{\Sigma}_p\right)$, 且 $q \neq p$, 则有

$$\Delta d_p(q) \leq (n-1)\,\mathrm{ct}_k\,(d_p(q))\,.$$

等号成立时, 沿着连接 p,q 的唯一最短正规测地线 $\gamma:[0,l]\to M$, $T_{\gamma(t)}M$ 中包含 $\dot\gamma(t)$ 的 2 维平面的截面曲率为 k.

证明 取连接 p,q 的唯一最短正规测地线 $\gamma:[0,l]\to M$, 其中 $l=d(p,q)$. 跟 Rauch 比较定理和 Hessian 比较定理的证明一样, 定义 $A(t)$, $K(t)$ 和 $\mathrm{I\!I}(t)$. 沿 γ 有如下 Riccati 方程组:

$$\dot{\mathrm{I\!I}}(t)+\mathrm{I\!I}^2(t)+K(t)=0.$$

根据 Hessian 比较定理的证明, 可知 $\mathrm{I\!I}(t)$ 是距离函数的 Hessian 在一组标准正交基下的矩阵. 根据 Hessian 比较定理证明后的注记, 可知 $\mathrm{I\!I}(t)$ 还是以 p 为球心、t 为半径的测地球面关于内法向量的第二基本形式在同一组标准正交基下的矩阵. 对 Riccati 方程求迹, 得

$$(\mathrm{tr}\,\mathrm{I\!I}(t))'+\mathrm{tr}\left(\mathrm{I\!I}^2(t)\right)+\mathrm{Ric}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))=0.$$

利用 Cauchy–Schwarz 不等式可得

$$\mathrm{tr}\left(\mathrm{I\!I}^2\right)\geq\frac{1}{n-1}\left(\mathrm{tr}\,\mathrm{I\!I}\right)^2.$$

于是有

$$\dot H(t)+\frac{1}{n-1}H^2(t)+\mathrm{Ric}(\dot\gamma(t),\dot\gamma(t))\leq 0.$$

其中 $H(t)=\mathrm{tr}(\mathrm{I\!I}(t))=\Delta d_p(\gamma(t))$. 当 $\mathrm{Ric}(\dot\gamma,\dot\gamma)\geq(n-1)k$ 时, 进一步可得

$$\dot H(t)+\frac{1}{n-1}H^2(t)+(n-1)k\leq 0.$$

下面将上式与 M_k^2 上相应的方程进行比较:

$$\mathrm{ct}_k'(t)+\mathrm{ct}_k^2(t)+k=0,\quad 0<t<\min\left\{l,\pi/\sqrt{k}\right\}.$$

记

$$h(t)=\frac{H(t)}{n-1}-\mathrm{ct}_k(t),\quad 0<t<\min\left\{l,\pi/\sqrt{k}\right\},$$

则 h 满足如下微分不等式

$$h'(t)+p(t)h(t)\leq 0,\quad 0<t<\min\left\{l,\pi/\sqrt{k}\right\}.\tag{10.1}$$

其中

$$p(t)=\frac{H(t)}{n-1}+\mathrm{ct}_k(t).$$

对于 $0<\delta<\min\left\{l,\pi/\sqrt{k}\right\}$, 由 (10.1) 可得

$$\left(h(t)e^{\int_\delta^t p(s)ds}\right)'\leq 0.$$

于是对于 $\delta\leq t$, 有

$$h(t)e^{\int_\delta^t p(s)ds}\leq h(\delta).$$

即

$$h(t)\leq h(\delta)e^{-\int_\delta^t p(s)ds}.$$

由于 $\mathrm{II}(t)=\frac{1}{t}I_{n-1}+O(t),\mathrm{ct}_k(t)=\frac{1}{t}+O(t)$, 所以

$$h(t)=O(t),\quad p(s)=\frac{2}{s}+O(s).$$

固定 t, 令 $\delta\to 0^+$, 可得

$$h(t)\leq\lim_{\delta\to 0^+}e^{-\int_\delta^t p(s)ds}h(\delta)=0.$$

所以有

$$H(t)\leqslant(n-1)\,\mathrm{ct}_k(t).$$

即 $\Delta d_p(q)\leqslant(n-1)\,\mathrm{ct}_k\left(d_p(q)\right)$ 且 $l\leq\frac{\pi}{\sqrt{k}}$.

若等号成立, 则 $\mathrm{tr}(\mathrm{II}(t))=(n-1)\,\mathrm{ct}_k(t)$. 由 Cauchy–Schwarz 不等式成立的条件可得

$$\mathrm{II}(t)=\mathrm{ct}_k(t)I_{n-1}.$$

再代入 Riccati 方程组得 $K(t)=kI_{n-1}$.

10.2 体积比较定理

若 (M^n,g) 为定向黎曼流形, 则可以定义体积形式 $dV_g=\sqrt{\det(g_{ij})}\,dx^1\wedge\cdots\wedge dx^n$. 设 $\Omega\subset M^n$ 为紧集, 则 Ω 的体积为

$$\mathrm{Vol}(\Omega)=\int_\Omega dV_g.$$

有意义的是 $\Omega=B_r(p)$.

定理 10.3 (体积比较定理 (Bishop–Gromov, 1980))

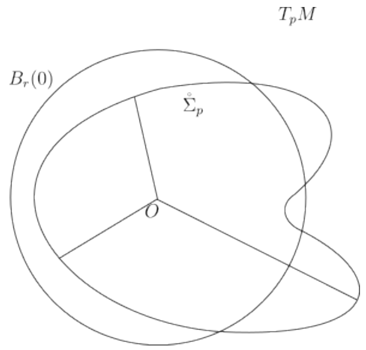
设 (M^n,g) 为定向黎曼流形, $p\in M$. 若 $\mathrm{Ric}_M\geq(n-1)k$, 则 $\frac{\mathrm{Vol}(B_R(p))}{\mathrm{Vol}\left(B_R^k\right)}$ 关于 R 单调递减, 其中 B_R^k 表示同维数的曲率为 k 的单连通空间形式中半径为 R 的测地球. 特别地, $\mathrm{Vol}\left(B_r(p)\right)\leq\mathrm{Vol}\left(B_r^k\right), r>0$; $\frac{\mathrm{Vol}(B_R(p))}{\mathrm{Vol}(B_r(p))}\leq\frac{\mathrm{Vol}\left(B_R^k\right)}{\mathrm{Vol}\left(B_r^k\right)}$, $R\geq r>0$.

证明思路: 找个好的坐标系——极坐标 (指数映射).

证明 有如下基本关系:

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\left(B_r(p)\right)&=\mathrm{Vol}\left(B_r(p)\cap\exp_p\left(\mathring{\Sigma}_p\right)\right)+\mathrm{Vol}\left(B_r(p)\cap C(p)\right)\\&=\mathrm{Vol}\left(B_r(p)\cap\exp_p\left(\mathring{\Sigma}_p\right)\right)\\&=\mathrm{Vol}\left(\exp_p\left(B_p(r)\cap\mathring{\Sigma}_p\right)\right).\end{aligned}$$

注意到 $\mathring{\Sigma}_p$ 在 T_pM 中为星形区域, 微分同胚于 B^n. 存在 $\mathbb{S}^n$ 上的函数 f, 使得 $0<f\leq r$, 且



$$B_p(r)\cap\mathring{\Sigma}_p=\{t\theta\,|\,\theta\in T_pM,\,|\theta|=1,\,0\le t<f(\theta)\le r\}\,.$$

易见, $\exp\big(\mathring{\Sigma}_p\cap B_p(r)\big)$ 中点 y 可表示为 (t,θ), 若 $y=\exp_p(t,\theta)\neq p$. 设 γ 是连接 p 和 y 的唯一最短测地线, 则 $\dot\gamma(0)=\theta$, $L(\gamma)=d(p,y)=t$. 取 T_pM 的一组标准正交基 $\{e_i\}_{i=1}^n$, 其中 $e_n=\theta$. 将 $\{e_i\}$ 沿 γ 平行移动得到向量场 $\{e_i(t)\}$, 显然 $e_n(t)=\dot\gamma(t)$. 设 $U_i(t)$ 是沿 $\gamma(t)$ 的正常 Jacobi 场, 满足初始条件

$$U_i(0)=0,\quad \dot U_i(0)=e_i,\quad i=1,\cdots,n-1.$$

在标准正交基基 $\{e_i\}_{i=1}^n$ 下, $U_i(t)$ 可以表示为

$$U_i(t)=\sum_{j=1}^{n-1}a_{ij}(t)e_j(t),\quad i=1,\cdots,n-1.$$

由 Jacobi 场方程及初值条件可得:

$$\begin{cases}\ddot A(t)+K(t)A(t)=0;\\ A(0)=0,\ \dot A(0)=I_{n-1}.\end{cases}$$

其中 $A(t)=(a_{ij}(t))$, $K(t)=(K_{ij}(t))$, $K_{ij}(t)=R\left(\dot r(t),e_i(t),e_j(t),\dot r(t)\right)$. 有

$$\exp_{*(t\theta)}\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)=\dot\gamma(t)=e_n(t),\quad \exp_{*(t\theta)}\left(te_i\right)=U_i(t).$$

因此,

$$\exp^*_{(t\theta)}\left(dV_M\right)\left(te_1\cdots,te_{n-1},\frac{\partial}{\partial t}\right)=dV_M\big(U_1(t),\cdots,U_{n-1}(t),e_n(t)\big)=\det A(t,\theta).$$

所以

$$\exp^*_{(t\theta)}(dV_M)=t^{-n}\det A(t,\theta)\,dV_{\mathbb{R}^n}=\det A(t,\theta)\,dV_{\mathbb{S}^{n-1}}\wedge \mathrm{d}t.$$

从而有

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}\left(B_r(p)\right)&=\int_{B_r(p)\cap\exp_p\left(\mathring{\Sigma}_p\right)}dV_M=\int_{B_p(r)\cap\mathring{\Sigma}_p}\exp^*(dV_M)\\&=\int_{B_p(r)\cap\mathring{\Sigma}_p}\det A(t,\theta)\,dV_{\mathbb{S}^{n-1}}\wedge dt\\&=\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\int_0^r\chi_{\mathring{\Sigma}_p}(t,\theta)\det A(t,\theta)\,dt\,d\theta.\end{aligned}$$

令 $\det A(t,\theta)=J_{t,\theta}$. 有

$$\dot J_{t,\theta}=\sum_{i,j=1}^{n-1}A_{ij}(t,\theta)\dot a_{ij}(t,\theta)=\det A(t,\theta)\,\mathrm{tr}\left(A^{-1}(t,\theta)\cdot\dot A(t,\theta)\right)=J_{t,\theta}\,\mathrm{tr}(\mathrm{I\!I}(t,\theta)).$$

由 Laplacian 比较定理, 当 $t>0$ 且 $t\theta\in\mathring{\Sigma}_p$ 时, 有

$$\frac{\dot{J}_{t,\theta}}{J_{t,\theta}}=\operatorname{tr}\mathrm{I\!I}(t,\theta)\leq\operatorname{tr}\bar{\mathrm{I\!I}}(t,\theta)=\frac{\dot{\bar{J}}_{t,\theta}}{\bar{J}_{t,\theta}}.$$

即

$$\left(\frac{J_{t,\theta}}{\bar{J}_{t,\theta}}\right)'\leq 0.$$

由初始条件可知

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{J_{t,\theta}}{\bar{J}_{t,\theta}}=1,$$

最终得到, 当 $t\theta\in\mathring{\Sigma}_p$ 时, 有

$$J_{t,\theta}\leq\bar{J}_{t,\theta}.$$

引理 10.1

设 f,g 为定义在 $(0,\infty)$ 上的正可测函数. 若 f/g 单调递减, 则 $\int_0^t f(s)ds/\int_0^t g(s)ds$ 关于 t 也单调递减.

证明自行完成.

继续定理的证明. 由前面分析知 $\frac{J_{t,\theta}}{\bar{J}_{t,\theta}}$ 单调减, 因此 $\frac{\chi_{\mathring{\Sigma}_p}(t,\theta)J_{t,\theta}}{\bar{J}_{t,\theta}}$ 也单调减. 利用引理10.1, 可得

$$\begin{aligned}\frac{\operatorname{Vol}(B_r(p))}{\operatorname{Vol}(B_r^k)}&=\frac{1}{\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{\int_0^r\chi_{\mathring{\Sigma}_p}J_{t,\theta}\,dt}{\int_0^r\bar{J}_{t,\theta}\,dt}\,d\theta\\&\geq\frac{1}{\omega_n}\int_{\mathbb{S}^{n-1}}\frac{\int_0^R\chi_{\mathring{\Sigma}_p}J_{t,\theta}\,dt}{\int_0^R\bar{J}_{t,\theta}\,dt}\,d\theta\\&=\frac{\operatorname{Vol}(B_R(p))}{\operatorname{Vol}(B_R^k)}.\end{aligned}$$

令 $r\to 0^+$, 可得绝对比较.

推论 10.2

设 (M^n,g) 为完备黎曼流形. 若 $\operatorname{Ric}_M\geq(n-1)k>0$, 则 $\operatorname{Vol}(M)\leq\operatorname{Vol}\left(\mathbb{S}^n\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)\right)$, 等号成立当且仅当 M 与球面 $\mathbb{S}^n\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ 等距同构.

证明 先证明 $k_g\equiv k$, 再利用 Cartan 等距定理.

定理 10.4 (最大直径定理)

设 (M^n,g) 为完备黎曼流形, $\operatorname{Ric}_M\geq(n-1)k>0$. 则 $\operatorname{diam}(M^n,g)\leq\pi/\sqrt{k}$, 等号成立当且仅当 M 与球面 $\mathbb{S}^n\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)$ 等距.

证明 不妨设 $k=1$ (同时放缩即可). $d(M,g)\leq\frac{\pi}{\sqrt{k}}$ 由 Bonnet–Myers 定理可得, 关键是刚性. 设 $d(M^n,g)=\pi$. 则

$$B_r(p)\cap B_{\pi-r}(q)=\emptyset,\quad r\in(0,\pi).$$

记 $V(p,r)=\operatorname{Vol}(B_r(p))$, $V(q,s)=\operatorname{Vol}(B_s(q))$, 则

$$V(p,r)+V(q,\pi-r)\leq\operatorname{Vol}(M).$$

由 $d(M)=\pi$ 知, $V(p,\pi)=V(q,\pi)=\mathrm{Vol}(M)$. 记 S^n 中半径为 r 的测地球的体积为 $V(r)$. 由体积比较定理,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}(M) &\geq V(p,r)+V(q,\pi-r)\\ &=\frac{V(p,r)}{V(r)}V(r)+\frac{V(q,\pi-r)}{V(\pi-r)}V(\pi-r)\\ &\geq \frac{V(p,\pi)}{V(\pi)}V(r)+\frac{V(q,\pi)}{V(\pi)}V(\pi-r)\\ &=\frac{\mathrm{Vol}(M)}{\mathrm{Vol}(\mathrm{S}^n)}[V(r)+V(\pi-r)]=\mathrm{Vol}(M).\end{aligned}$$

上式中的不等号都必须为等号, 所以

$$\frac{V(p,r)}{V(r)}=\frac{\mathrm{Vol}(M)}{\mathrm{Vol}(\mathrm{S}^n)},\quad r\in(0,\pi).$$

令 $r\to 0^+$, 得 $\mathrm{Vol}(M)=\mathrm{Vol}\,(\mathrm{S}^n)$. 再由体积比较定理的刚性, 知 M 等距同构于 S^n.

✍ **练习 10.1** 补全推论10.2的证明.

第 11 章 Hodge 理论

11.1 de Rham 上同调

设 M 为微分流形, 用 $\Omega^r(M)$ 表示 M 上 r 次微分形式的集合. 有外微分运算:

$$d:\Omega^r(M)\to\Omega^{r+1}(M)$$

满足 $d^2=0$. 若 $d\omega=0$, 则称 ω 为闭形式, 若 $\omega=d\eta$, 则称 ω 为恰当形式. 恰当形式必为闭形式. 记 r 次闭形式的全体为 $Z^r(M,\mathbb{R})$, r 次恰当形式的全体记为 $B^r(M,\mathbb{R})$. 令

$$H^r_{dR}(M,\mathbb{R})=Z^r(M,\mathbb{R})/B^r(M,\mathbb{R}).$$

$H^r_{dR}(M,\mathbb{R})$ 称为 M 的 r 次上同调群, 为同伦不变量. 微分形式之间还有楔积运算:

$$\wedge:\Omega^r(M)\times\Omega^s(M)\longrightarrow\Omega^{r+s}(\Omega)$$

$$(\omega,\eta)\mapsto\omega\wedge\eta.$$

若 $\omega\in Z^r(M,)$, 则有 $\omega\wedge d\eta=(-1)^r d(\omega\wedge\eta)$. 因此

$$Z^r(M,\mathbb{R})\times B^s(M,\mathbb{R})\subset B^{r+s}(M,\mathbb{R}).$$

这诱导了 de Rham 上同调环:

$$H^r_{dR}(M,\mathbb{R})\times H^s_{dR}(M,\mathbb{R})\to H^{r+s}_{dR}(M,\mathbb{R})$$

定理 11.1 (de Rham 定理)

设 M 为闭流形 (即紧致无边流形), 则 de Rham 上同调环 $\oplus^r H^r_{dR}(M,\mathbb{R})$ 与奇异上同调环 $\oplus^r H^r(M,\mathbb{R})$ 同构.

11.2 调和微分形式和 Hodge 定理

给定 $[\omega]\in H^r_{dR}(M,\mathbb{R})$, 如何找到一个 "好" 的代表元? 自然的想法是考虑某种 "能量最小" 的闭形式. 先对微分形式定义范数.

在 M 上任取黎曼度量 g. 选一组标准正交基 $\{e_1,\dots,e_n\}$. 对偶基记为 $\{e_1^*,\dots,e_n^*\}$, 规定 $\langle e_i^*,e_j^*\rangle=\delta_{ij}$, 这样则会给出了 T_p^*M 的一个内积. 这种方式与基选取无关, 可以定义在整个 T^*M 上. 再考虑 $\otimes T_p^*M$ 的内积. 设 $X,\ Y\in\otimes^r T_p^*M$,

$$X=\sum_{i_1\cdots i_r}a_{i_1\cdots i_r}e_{i_1}^*\otimes\cdots\otimes e_{i_r}^*,\quad Y=\sum_{i_1\cdots i_r}b_{i_1\cdots i_r}e_{i_1}^*\otimes\cdots\otimes e_{i_r}^*,$$

规定

$$\langle X,Y\rangle=\frac{1}{r!}\sum_{i_1\cdots i_r}a_{i_1\cdots i_r}b_{i_1\cdots i_r}.$$

特别地, 对于 $\omega,\ \eta\in\Lambda^r T_p^*M$, 若

$$\omega=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\omega_{i_1\cdots i_r}e_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge e_{i_r}^*,\quad \eta=\sum_{i_1<\cdots<i_r}\eta_{i_1\cdots i_r}e_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge e_{i_r}^*,$$

则有

$$\langle w,\eta\rangle=\sum_{i_1<\cdots<i_r}w_{i_1\cdots i_r}\eta_{i_1\cdots i_r}.$$

规定不同次数的外形式内积为 0.

设 (M,g) 为可定向闭黎曼流形, 对 $\varphi,\ \psi\in\Omega^r(M)$, 定义

$$(\varphi,\psi)=\int_M\langle\varphi,\psi\rangle\, dV_g,\quad \|\varphi\|=\sqrt{(\varphi,\varphi)}.$$

此时 $d:\Omega^r(M)\to\Omega^{r+1}(M)$ 为内积空间中的线性算子, 伴随算子 (若存在) 记为 $d^*:\Omega^{r+1}(M)\to\Omega^r(M)$, 即

$$(d\varphi,\psi)=(\varphi,d^*\psi),\quad \forall\varphi\in\Omega^r(M),\ \psi\in\Omega^{r+1}(M).$$

问: d^* 是否存在, 有没有直接的表达式?

先引入 Hodge $*$ 算子: $*:\Omega^r(M)\to\Omega^{n-r}(M)$. 先对基定义

$$*\left(e_{i_1}^*\wedge\cdots\wedge e_{i_r}^*\right)=\delta_{i_1\cdots i_n}^{1\cdots n}e_{i_{r+1}}^*\wedge\cdots\wedge e_{i_n}^*.$$

其中, $\delta_{i_1\cdots i_n}^{1\cdots n}$ 对偶置换取 1, 对奇置换取 -1. 再将 $*$ 线性延拓到整个 $\Omega^r(M)$ 即可.

命题 11.1 (Hodge $*$ 算子的性质)

设 $\varphi,\ \psi\in\Omega^r(M)$, 有:

(i) $\varphi\wedge*\psi=\langle\varphi,\psi\rangle\, dV_g$;

(ii) $*\,dV_g=1,\ *1=dV_g$;

(iii) $*(*\varphi)=(-1)^{r(n-r)}\varphi$;

(iv) $(*\varphi,*\psi)=(\varphi,\psi)$.

定义 11.1 (余微分算子)

定义余微分算子 $\delta:\Omega^{r+1}(M)\to\Omega^r(M)$ 为

$$\delta=(-1)^{nr+1}*\circ d\circ*.$$

若有 $\omega\in\Omega^{r+1}(M)$ 满足 $\delta\omega=0$, 则称 ω 为**余闭的 (coclosed)**.

命题 11.2

若 (M,g) 为可定向闭黎曼流形, 则 $d^*=\delta$.

证明 设 $\varphi\in\Omega^r(M)$, 对任意 $\psi\in\Omega^{r-1}(M)$, 有

$$\begin{aligned}(d^*\varphi,\psi)=(\varphi,d\psi)&=\int_M(d\psi)\wedge(*\varphi)\\&=\int_M d\left(\psi\wedge(*\varphi)\right)-(-1)^{r-1}\int_M\psi\wedge(d(*\varphi))\\&=(-1)^{nr+1}\int_M\psi\wedge\left[*^2(d(*\varphi))\right]\\&=(\delta\varphi,\psi).\end{aligned}$$

由 ψ 的任意性, 可知结论成立.

余微分算子同样有**幂零性质**:

$$\delta^2=*\circ d\circ*\circ*\circ d\circ*=(-1)^{r(n-r)}*\circ d^2\circ*=0.$$

与外微分算子不同, 余微分算子是依赖于度量 g 的, 这是因为 Hodge $*$ 算子依赖于度量. 利用外微分算子和余微分算子, 可以定义

定义 11.2 (Hodge–Laplace 算子)

$$\Delta^H : \Omega^r(M) \to \Omega^r(M), \quad \Delta^H = d \circ \delta + \delta \circ d.$$

若有 ω 满足 $\Delta^H \omega = 0$, 则称 ω 为**调和微分形式**. M 上 r 次调和微分形式全体记为 $\mathcal{H}^r(M)$. ♣

命题 11.3

设 (M, g) 为可定向闭黎曼流形, 则以下成立:

(i) $* \circ \Delta^H = \Delta^H \circ *$;

(ii) Δ^H 为对称算子;

(iii) 对于 $f \in C^\infty(M)$, 有 $\Delta^H f = -\Delta f$;

(iv) $\omega \in \Omega^r(M)$, 则 $\Delta^H \omega = 0$ 当且仅当 $d\omega = 0$ 且 $\delta\omega = 0$. ♠

证明

(i) 根据定义, 有 $\Delta^H = (-1)^{nr+1}(d \circ * \circ d \circ * + * \circ d \circ * \circ d)$, 再利用 $*^2 = (-1)^{r(n-r)} id$.

(ii) 设 ω, $\psi \in \Omega^r(M)$, 有

$$\begin{aligned}\left(\Delta^H w, \psi\right) &= (\delta(dw) + d(\delta w), \psi) \\ &= (dw, d\psi) + (\delta w, \delta\psi) = \left(w, \Delta^H \psi\right).\end{aligned}$$

(iii) 由于 $*f = f dV_g$, 所以 $d(*f) = 0$, 因此 $\delta f = 0$. 有

$$\begin{aligned}\Delta^H f &= d(\delta f) + \delta(df) \\ &= 0 + \delta(df) \\ &= - * \circ d \circ *(df) \\ &= - * \circ d \circ * \left(f_i dx^i\right) \\ &= (-1)^i * \circ d\left(g^{ij} f_i \sqrt{G} dx^1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^j} \wedge \cdots \wedge dx^n\right) \\ &= -\Delta f.\end{aligned}$$

(iv) 当 $d\omega = 0$ 且 $\delta\omega = 0$, 显然 $\Delta^H \omega = 0$. 反之, 设 $\Delta^H \omega = 0$, 有

$$0 = \left(\Delta^H w, w\right) = (dw, dw) + (\delta w, \delta w) \geq 0.$$

因此, $d\omega = 0$ 且 $\delta\omega = 0$.

命题 11.4

设 (M, g) 为可定向闭黎曼流形, $\omega_0 \in Z^r(M, \mathbb{R})$, 则 $[\omega_0]$ 中调和形式 (若存在) 是唯一的, 且具有最小范数. ♠

证明 设 $[\omega_1] = [\omega_0]$ 且 $\Delta^H \omega_1 = 0$, 即 $\omega_1 = \omega_0 + d\eta$ 且 $\delta\omega_1 = 0$. 有

$$\begin{aligned}(\omega_0, \omega_0) &= (\omega_1 - d\eta, \omega_1 - d\eta) \\ &= (\omega_1, \omega_1) + (d\eta, d\eta) - 2(\omega_1, d\eta) \\ &= (\omega_1, \omega_1) + (d\eta, d\eta) - 2(\delta\omega_1, \eta) \\ &= (w_1, \omega_1) + (d\eta, d\eta) \geqslant (w_1, w_1).\end{aligned}$$

等号成立当且仅当 $d\eta=0$, 即 $\omega_1=\omega_0$. 若 $[\omega]$ 中若另有调和微分形式 ω_2, 根据类似的分析, 可以得到 $(\omega_2,\omega_2)\geqslant(\omega_1,\omega_1)$; 同理, $(\omega_1,\omega_1)\geqslant(\omega_2,\omega_2)$. 故 $(\omega_1,\omega_1)=(\omega_2,\omega_2)$. 由取等条件知 $\omega_1=\omega_2$.

因此在 $[\omega_0]$ 中寻找调和微分形式可以转化为求解变分问题:

$$\inf_{[\omega]=[\omega_0]}\|w\|.$$

$$\text{存在性: 变分结构}\xrightarrow{\text{极小化序列的紧性}}\text{弱解}\xrightarrow{\text{椭圆方程 (组) 正则性理论}}\text{经典解}$$

定理 11.2 (Hodge 定理)

$$\Omega^r(M)=\mathcal{H}^r(M)\oplus d\left(\Omega^{r-1}(M)\right)\oplus\delta\left(\Omega^{r+1}(M)\right).$$

显然, 右边包含于左边. 我们验证右边三个空间彼此正交. 设 $\omega\in\mathcal{H}^r(M)$, $\eta\in\Omega^{r-1}(M)$, $\xi\in\Omega^{r+1}(M)$, 则有

$$(\omega,d\eta)=(\delta w,\eta)=0,\quad(\omega,\delta\xi)=(dw,\xi)=0,\quad(d\eta,\delta\xi)=\left(d^2\eta,\xi\right)=0.$$

因此右边三个空间彼此正交. 要证明左边包含于右边, 需要较多的分析技术, 感兴趣的同学可自学相关内容.

推论 11.1

$H^r_{dR}(M,\mathbb{R})$ 中每个同调类都有唯一调和代表元.

证明 唯一性在命题11.4中已证, 这里证明存在性. 设 $[\omega]\in H^r_{dR}(M,\mathbb{R})$, 由 Hodge 定理,

$$\omega=\omega_0+d\eta+\delta\xi.$$

其中 $\omega_0\in H^r(M)$, $\eta\in\Omega^{r-1}$, $\xi\in\Omega^{r+1}(M)$. 由 $d\omega=0$ 可得

$$d\delta\xi=0.$$

因此

$$(\delta\xi,\delta\xi)=(d\delta\xi,\xi)=0,$$

即 $\delta\xi=0$. 从而 $\omega=\omega_0+d\eta$, 即 ω_0 为 $[\omega]$ 中调和代表元.

结合 Hodge 定理和 de Rham 定理, 有

$$\mathcal{H}^r(M)\simeq H^r(M,\mathbb{R}).$$

所以 $\dim H^r(M)=b_r(M)$, 其中 $b_r(M)$ 是 M 第 r 个 Betti 数.

由 Poincaré 对偶, 可知 $H^r(M,\mathbb{R})$ 与 $H^{n-r}(M,\mathbb{R})$ 同构. 由 $\Delta^H\omega=0\Leftrightarrow\Delta^H(*\omega)=0$, 可知 $*$ 诱导了同构

$$*:\mathcal{H}^r(M)\longrightarrow\mathcal{H}^{n-r}(M).$$

11.3 Hodge 定理的应用

11.3.1 调和 1-形式

设 (M^n,g) 为可定向黎曼流形, $\omega\in\Omega^1(M)$, 则 $\omega^\#\in\Gamma(TM)$, 记为 X. 有

$$\begin{aligned}d\omega(Y,Z)&=Y(\omega(Z))-Z(\omega(Y))-\omega([Y,Z])\\&=Y\langle X,Z\rangle-Z\langle X,Y\rangle-\langle X,\nabla_YZ-\nabla_ZY\rangle\\&=\langle\nabla_YX,Z\rangle-\langle\nabla_ZX,Y\rangle.\end{aligned}$$

因此, ω 闭等价于 $\nabla\omega^{\#}$ 对称.

命题 11.5

在一组标准正交基 $\{e_i\}_{j=1}^{n}$ 下, 有

$$d=\sum_{j=1}^{n} e_j\wedge\nabla_{e_j},\quad \delta=-\sum_{j=1}^{n}\iota\left(e_j\right)\wedge\nabla_{e_j},$$

其中 ι 表示内乘运算.

应用命题11.5, 可得

$$\delta\omega=-\left(\nabla_{e_i}\omega\right)\left(e_i\right)=-\operatorname{div}\left(\omega^{\sharp}\right).$$

因此 ω 余闭当且仅当 $\nabla\omega^{\sharp}=0$. 总结一下, ω 调和当且仅当为 $\omega^{\sharp}$ 为迹零对称 $(1,1)$ 张量场.

11.3.2 3 维流形上的场论

我们学习过 $\mathbb{R}^3$ 上的场论的基本概念. 设 $X=a\frac{\partial}{\partial x}+b\frac{\partial}{\partial y}+c\frac{\partial}{\partial z}$, 其中 $a,\ b,\ c\in C^{\infty}(\mathbb{R}^3)$, 则

$$\operatorname{div}(X)=\frac{\partial a}{\partial x}+\frac{\partial b}{\partial y}+\frac{\partial c}{\partial z},$$

$$\operatorname{curl}X=\left(\frac{\partial c}{\partial y}-\frac{\partial b}{\partial z}\right)\frac{\partial}{\partial x}+\left(\frac{\partial a}{\partial z}-\frac{\partial c}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial y}+\left(\frac{\partial b}{\partial x}-\frac{\partial a}{\partial y}\right)\frac{\partial}{\partial z}.$$

可以将这些概念推广到可定向 3 维流形上. 设 (M^3,g) 为可定向闭黎曼流形, $X,\ Y\in\Gamma(TM)$.

- 外积: $X\wedge Y=(dV_g(X,Y))^{\sharp}=\left[*\left(X^{\flat}\wedge Y^{\flat}\right)\right]^{\sharp}$, 混合积: $\langle X\wedge Y,Z\rangle=dV_g(X,Y,Z)$.
- 散度: $\operatorname{div}(X)=-\delta\left(X^{\flat}\right)$.
- 旋度: $\operatorname{curl}(X)=\left(*\left(dX^{\flat}\right)\right)^{\sharp}$.

因此一个向量场散度为零当且仅当对偶 1-形式是余闭的, 旋度为零当且仅当对偶 1-形式是闭的. 若一个向量场的对偶 1-形式是调和的, 则称此向量场为调和向量场. 一个向量场为调和向量场的充要条件是散度和旋度都为零.

根据 Hodge 定理, 有:

$$\begin{aligned}\Omega^1(M)&=\mathcal{H}^1(M)\oplus d\left(\Omega^0(M)\right)\oplus\delta\left(\Omega^2(M)\right)\\&=\mathcal{H}^1(M)\oplus d(C^{\infty}(M))\oplus *d\left(\Omega^1(M)\right).\end{aligned}$$

对偶一下, 则可得向量场的分解:

$$\Gamma(TM)=\mathcal{H}^1\left(\Gamma(TM)\right)\oplus\nabla\left(C^{\infty}(M)\right)\oplus\operatorname{curl}\left(\Gamma(TM)\right).$$

即对于任意向量 X, 有如下分解:

$$X=Y+\nabla f+\operatorname{curl}Z,$$

其中 Y 为调和向量场, ∇f 为梯度场, $\operatorname{curl}Z$ 为旋量场. 此分解定理最早由德国生理学家、物理学家、数学家 Helmholtz 得到.

由 $d^2=0$ 及 $*^2=1$ 可得

$$\operatorname{curl}(\nabla f)=(*\circ d\circ df)^{\sharp}=0,$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl}Z)=-\delta\circ*\circ dZ^{\flat}=*\circ d\circ*\circ *dZ^{\flat}=0.$$

即, 梯度场为无旋场 (旋度为零), 旋量场为无散场 (散度为零).

11.3.3 Laplace 方程

设 (M,g) 为可定向闭黎曼流形, $\phi \in C^\infty(M)$, 问何时方程 $\Delta f = \phi$ 有解? 若有解, 利用散度定理, 可得

$$\int_M \phi \, dV_g = \int_M \Delta f \, dV_g = \int_M \operatorname{div}(\nabla f) \, dV_g = 0.$$

必要条件是 $\int_M \phi \, dV_g = 0$, 充分么? 根据 Hodge 定理,

$$C^\infty(M) = \Omega^0(M) = \mathcal{H}^0(M) \oplus \delta\left(\Omega^1(M)\right),$$

其中, $\mathcal{H}^0(M) = \{h \in C^\infty(M) \mid \Delta h = 0\}$. 设 $h \in \mathcal{H}^0(M)$, 利用散度定理, 可得

$$0 = \int_M h \Delta h \, dV_g = -\int_M |\nabla h|^2 \, dV_g.$$

所以 h 为常数, 因而 $\mathcal{H}^0(M) = \mathbb{R}$. 再利用 Hodge 定理, 可得

$$\Omega^1(M) = \mathcal{H}^1(M) \oplus d\left(\Omega^0(M)\right) \oplus \delta\left(\Omega^2(M)\right).$$

因此, $\delta\Omega^1(M) = \delta d(\Omega^0(M))$. 所以, $C^\infty(M) = \mathbb{R} \oplus \delta d(\Omega^0(M))$. 这意味着对任意 $\phi \in C^\infty(M)$, 存在 $c \in \mathbb{R}$ 和 $f \in C^\infty(M)$, 使得 $\phi = c + \Delta f$. 下面确定常数 c, 积分可得

$$0 = \int_M \phi \, dV_g = c \operatorname{Vol}(M).$$

所以 $c = 0$, 即 $\phi = \Delta f$. 此外, 由 $\mathcal{H}^0(M) = \mathbb{R}$ 可知不同的解只相差一个常数.

11.3.4 Bochner 技巧

设 (M,g) 为闭黎曼流形, $f \in C^\infty$, 回忆我们在练习4.3中证过的 Bochner 公式:

$$\frac{1}{2}\Delta|\nabla f|^2 = \left|\nabla^2 f\right|^2 + \langle \nabla f, \nabla \Delta f \rangle + \operatorname{Ric}(\nabla f, \nabla f).$$

在计算几何量的过程中, 交换求导顺序导致曲率项出现, 并利用曲率条件得出几何或拓扑结论的技术被称为 **Bochner 技巧**. Bochner 公式在调和函数的梯度估计, 第一特征值估计等问题中具有重要应用.

定理 11.3 (Bochner, 1948)

设 (M,g) 为可定向闭黎曼流形. 若 $\operatorname{Ric}_M \geq 0$, 则 M 上的调和 1-形式一定是平行的; 若 Ric_M 还在某一点为正, 则不存在非平凡的调和 1-形式.

♡

证明 设 ω 为调和 1-形式, 先证明

$$\frac{1}{2}\Delta\langle\omega,\omega\rangle = |\nabla\omega|^2 + \operatorname{Ric}\left(\omega^\sharp, \omega^\sharp\right). \tag{11.1}$$

记 $X=\omega^\sharp$. 根据11.3.1小节中的分析, ∇X 为迹零对称 $(1,1)$ 张量场.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\Delta\langle\omega,\omega\rangle=&\frac{1}{2}\Delta\langle X,X\rangle=\nabla_{e_i}\langle\nabla_{e_i}X,X\rangle-\left\langle\nabla_{\nabla_{e_i}e_i}X,X\right\rangle\\=&\nabla_{e_i}\langle\nabla_X X,e_i\rangle-\langle\nabla_X X,\nabla_{e_i}e_i\rangle\\=&\langle\nabla_{e_i}\nabla_X X,e_i\rangle\\=&R(e_i,X,X,e_i)+\langle\nabla_X\nabla_{e_i}X,e_i\rangle+\left\langle\nabla_{[e_i,X]}X,e_i\right\rangle\\=&\operatorname{Ric}(X,X)+X\langle\nabla_{e_i}X,e_i\rangle-\langle\nabla_{e_i}X,\nabla_X e_i\rangle\\&-\langle\nabla_{e_i}X,[X,e_i]\rangle\\=&\operatorname{Ric}(X,X)+\langle\nabla_{e_i}X,\nabla_{e_i}X\rangle\\=&\operatorname{Ric}(X,X)+|\nabla X|^2=\operatorname{Ric}\left(\omega^\sharp,\omega^\sharp\right)+|\nabla\omega|^2.\end{aligned}$$

对(11.1)两边积分得

$$\int_M|\nabla\omega|^2\,dV_g=-\int_M\operatorname{Ric}\left(\omega^\sharp,\omega^\sharp\right)\,dV_g\leq 0.$$

所以 $\nabla\omega=0$. 若 $\omega\neq0$, 则处处非零. 若一点处 Ricci 曲率为正, 则 $\int_M\operatorname{Ric}\left(\omega^\sharp,\omega^\sharp\right)\,dV_g>0$, 矛盾.

推论 11.2

设 (M^n,g) 为可定向闭黎曼流形. 若 $\operatorname{Ric}_M\geq0$, 则 $b_1(M)\leq n$. 若 $b_1(M)=n$, 则 (M,g) 等距同构于一个 n 维平坦环面. ♡

证明 由上一定理知, 调和 1-形式都是平行的, 因此对任意 $p\in M$, 下面映射为单射:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}:\mathcal{H}^1(M)&\longrightarrow T_p^*M\\\omega&\rightarrow\omega_p.\end{aligned}$$

因此 $b_1(M)=\dim\mathcal{H}^1(M)\leq\dim T_p^*M=n$. 当 $b_1(M)=n$ 时, 则 (M,g) 具有 n 个线性无关的平行向量场, 故度量平坦. 因此 (M,g) 的万有覆盖为 $\mathbb{R}^n$. 再通过更细致的分析, 可以证明 $\pi(M)=\mathbb{Z}^n$, 从而结论成立.

在 3 维, 正 Ricci 曲率度量对流形拓扑有更强的限制.

定理 11.4 (Hamilton, 1982)

设 (M^3,g) 为闭黎曼流形, $\operatorname{Ric}_M>0$. 则 $M\overset{\text{diff}}{=\!=}\mathbb{S}^3/\Gamma$, 其中 Γ 为 $O(4)$ 中自由作用在 $\mathbb{S}^3$ 上的离散子群. ♡

此定理的证明方法是 Ricci 流. Ricci 流为非线性 (弱) 抛物方程组: $\partial_t g=-2\operatorname{Ric}_g$. 在 Ricci 流下, g 最终演化为正常曲率度量. 使用 Ricci 流结合几何手术, Perelman 最终证明了 Poincaré 猜想: 单连通的 3 维闭流形微分同胚于 $\mathbb{S}^3$.

若假设曲率算子为正, 则可得到高阶同调群的消失性.

定理 11.5 (Singer–Meyer)

设 (M,g) 为可定向闭黎曼流形, 若其曲率算子为正, 则对于 $1\leq r\leq n-1$, 不存在非零调和 r-形式, 从而 $b_r(M)=0$. ♡

此定理的证明方法类似定理11.3, 需要用到更复杂的 Bochner 型公式.

定理 11.6 (Weitzenböck 公式)

设 (M,g) 为可定向黎曼流形, $\omega\in\Omega^r(M)$, 则

$$\frac{1}{2}\Delta\langle\omega,\omega\rangle=|\nabla\omega|^2+F(\omega),$$

其中,

$$F(\omega)=\left\langle e_j^*\wedge\iota\left(e_i\right)R\left(e_i,e_j\right)\omega,\omega\right\rangle.$$

♡

定义 11.3 (Killing 场)

设 (M,g) 为黎曼流形, 若存在向量场 K 使得 $\mathcal{L}_K g=0$, 其中 $\mathcal{L}$ 表示求 Lie 导数, 则称 K 为 Killing 向量场.

♣

按定义, 有

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{L}_K g\right)(Y,Z)&=K\langle Y,Z\rangle-\langle[K,Y],Z\rangle-\langle Y,[K,Z]\rangle\\&=\left\langle\nabla_Y K,X\right\rangle+\left\langle\nabla_X K,Y\right\rangle.\end{aligned}$$

因此 K 是 Killing 场等价于 ∇K 反对称.

定理 11.7 (Bochner, 1946)

设 (M,g) 为闭黎曼流形. 若 M 的 Ricci 曲率非正, 则 (M,g) 的 Killing 向量场必为平行向量场; 当 Ricci 还在某一点为正时, 不存在非平凡的 Killing 向量场.

♡

证明 此定理的证明方法类似定理11.3, 要用到如下式子:

$$\frac{1}{2}\Delta\langle K,K\rangle=-|\nabla K|^2+\operatorname{Ric}(K,K).$$

✍ **练习 11.1** 设 (M,g) 为可定向闭黎曼流形, 证明:

$$\Omega^r(M)=\mathcal{H}^r(M)\oplus d\delta\left(\Omega^r(M)\right)\oplus\delta d\left(\Omega^r(M)\right).$$