

数学物理方法讲义

缪炎刚

南开大学物理科学学院

February 1, 2017

II 积分变换简介

- 介绍:
 - *Fourier*变换

II 积分变换简介

- 介绍:
 - *Fourier*变换
 - *Laplace*变换

II 积分变换简介

- 介绍:

- *Fourier*变换
- *Laplace*变换

- 平生简介:

- Baron Jean Baptiste Joseph Fourier 1768-1830
法国数学家、埃及学家.
代表作:《热的分析理论》(1822年出版)

II 积分变换简介

- 介绍:

- *Fourier*变换
- *Laplace*变换

- 平生简介:

- Baron Jean Baptiste Joseph Fourier 1768-1830
法国数学家、埃及学家.
代表作:《热的分析理论》(1822年出版)
- Pierre Simon de Laplace 1749-1827
法国天文学家、数学家、物理学家.
研究领域: 概率论、天体力学、势函数理论、毛细现象理论.
重要贡献: 太阳系起源的星云假说(1796年).

II 积分变换简介

- 介绍:

- *Fourier*变换
- *Laplace*变换

- 平生简介:

- Baron Jean Baptiste Joseph Fourier 1768-1830
法国数学家、埃及学家.
代表作:《热的分析理论》(1822年出版)
- Pierre Simon de Laplace 1749-1827
法国天文学家、数学家、物理学家.
研究领域: 概率论、天体力学、势函数理论、毛细现象理论.
重要贡献: 太阳系起源的星云假说(1796年).

II 积分变换简介

- **目的:** 积分变换用于求解微分方程、积分方程和差分方程.

II 积分变换简介

积分变换的一般形式:

$$\tilde{f}(p) = \int_a^b K(p, x) f(x) dx,$$

x 为实数, p 为复数或实数.

II 积分变换简介

积分变换的一般形式:

$$\tilde{f}(p) = \int_a^b K(p, x) f(x) dx,$$

x 为实数, p 为复数或实数.

- 如果 $\tilde{f}(p)$ 存在, 则称它为 $f(x)$ 的积分变换, $K(p, x)$ 叫积分变换的核, $f(x)$ 叫做原函数, $\tilde{f}(p)$ 叫像函数.

II 积分变换简介

积分变换的一般形式:

$$\tilde{f}(p) = \int_a^b K(p, x) f(x) dx,$$

x 为实数, p 为复数或实数.

- 如果 $\tilde{f}(p)$ 存在, 则称它为 $f(x)$ 的积分变换, $K(p, x)$ 叫积分变换的核, $f(x)$ 叫做原函数, $\tilde{f}(p)$ 叫像函数.
- 不同的积分变换, 指积分变换的核和积分区间 $[a, b]$ 的不同.

II 积分变换简介

积分变换的一般形式:

$$\tilde{f}(p) = \int_a^b K(p, x) f(x) dx,$$

x 为实数, p 为复数或实数.

- 如果 $\tilde{f}(p)$ 存在, 则称它为 $f(x)$ 的积分变换, $K(p, x)$ 叫积分变换的核, $f(x)$ 叫做原函数, $\tilde{f}(p)$ 叫像函数.
- 不同的积分变换, 指积分变换的核和积分区间 $[a, b]$ 的不同.

II 积分变换简介

几种常用积分变换形式列表:¹

$K(p, x)$	积分区间	名称
e^{-ipx} (p 为实数)	$(-\infty, +\infty)$	Fourier变换
e^{-px} (p 为复数)	$[0, +\infty)$	Laplace变换
$xJ_\nu(px)$, $\nu \geq -\frac{1}{2}$ (p 为实数)	$[0, +\infty)$	Hankel变换
x^{p-1} (p 为复数)	$[0, +\infty)$	Mellin变换

¹ $J_\nu(px)$ 是 ν 阶Bessel函数.

目录 I

1

六、Fourier变换

- 1. Fourier变换的定义和存在条件
- 2. Fourier变换的性质
- 3. Fourier变换的应用举例

2

七、Laplace变换

- 1. Laplace变换的定义和存在条件
- 2. Laplace变换的性质
- 3. Laplace变换的反演
- 4. Laplace变换应用举例(求解微分方程)

3

八、 δ 函数

- 1. δ 函数的定义

目录 II

- 2. δ 函数的性质
- 3. δ 函数的一些表达式
- 4. δ 函数的广义Fourier变换

1. Fourier变换的定义和存在条件

Fourier变换的定义

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx$$

其中 ω 为实数.

1. Fourier变换的定义和存在条件

- 若 $\tilde{f}(\omega)$ 存在, 则称它是 $f(x)$ 的Fourier变换, $f(x)$ 为原函数, $\tilde{f}(\omega)$ 为像函数. 由 $\tilde{f}(\omega)$ 求 $f(x)$ 称为求逆变换或求反演.

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

1. Fourier变换的定义和存在条件

- 若 $\tilde{f}(\omega)$ 存在, 则称它是 $f(x)$ 的Fourier变换, $f(x)$ 为原函数, $\tilde{f}(\omega)$ 为像函数. 由 $\tilde{f}(\omega)$ 求 $f(x)$ 称为求逆变换或求反演.

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega x} d\omega.$$

- 用符号法表示:

$$F[f(x)] = \tilde{f}(\omega); \quad F^{-1}[\tilde{f}(\omega)] = f(x).$$

1. Fourier变换的定义和存在条件

Fourier变换的存在条件:

① 在任何有限区域上, $f(x)$ 满足Dirichlet条件:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \int_{-a}^a f(x+t) \frac{\sin pt}{t} dt = \pi f(x).$$

② $f(x)$ 绝对可积, 即 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ 存在.

1. Fourier变换的定义和存在条件

● 多元函数的Fourier变换

$$f(\vec{r}) = f(x, y, z),$$

$$\tilde{f}(\vec{k}) \equiv \tilde{f}(k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} dx dy dz.$$

1. Fourier变换的定义和存在条件

● 多元函数的Fourier变换

$$f(\vec{r}) = f(x, y, z),$$

$$\tilde{f}(\vec{k}) \equiv \tilde{f}(k_1, k_2, k_3) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} dx dy dz.$$

● 相应地, 反演为

$$f(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(\vec{k}) e^{i\vec{k} \cdot \vec{r}} d\vec{k}.$$

2. Fourier变换的性质

性质(1)

$$F[af(x) + bg(x)] = aF[f(x)] + bF[g(x)],$$

a, b 为常数.(线性的)

2. Fourier变换的性质

性质(1)

$$F[af(x) + bg(x)] = aF[f(x)] + bF[g(x)],$$

a, b 为常数.(线性的)

性质(2)

$$F[f'(x)] = i\omega F[f(x)]; \quad F[f^{(n)}(x)] = (i\omega)^n F[f(x)].$$

2. Fourier变换的性质

证明:

$$\begin{aligned} F[f'(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-i\omega x} \Big|_{-\infty}^{+\infty} \\ &\quad - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (-i\omega) f(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= i\omega \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \quad \left(\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0 \right) \\ &= i\omega F[f(x)]. \end{aligned}$$

2. Fourier变换的性质

性质(3)

$$F\left[\int_{x_0}^x f(x)dx\right] = \frac{1}{i\omega}F[f(x)].$$

2. Fourier变换的性质

性质(3)

$$F\left[\int_{x_0}^x f(x)dx\right] = \frac{1}{i\omega}F[f(x)].$$

● 证明: 令 $g(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx$, 则 $g'(x) = f(x)$.

$$F[f(x)] = F[g'(x)] = i\omega F[g(x)] = i\omega F\left[\int_{x_0}^x f(x)dx\right]$$

2. Fourier变换的性质

性质(3)

$$F\left[\int_{x_0}^x f(x)dx\right] = \frac{1}{i\omega}F[f(x)].$$

- 证明: 令 $g(x) = \int_{x_0}^x f(x)dx$, 则 $g'(x) = f(x)$.

$$F[f(x)] = F[g'(x)] = i\omega F[g(x)] = i\omega F\left[\int_{x_0}^x f(x)dx\right]$$

- 即

$$F\left[\int_{x_0}^x f(x)dx\right] = \frac{1}{i\omega}F[f(x)].$$

2. Fourier变换的性质

性质(4) 延迟定理

$$F[f(x - x_0)] = e^{-i\omega x_0} F[f(x)].$$

证明: $F[f(x - x_0)]$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x_0) e^{-i\omega x} dx \\ &= e^{-i\omega x_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x - x_0) e^{-i\omega(x - x_0)} d(x - x_0) \\ &= e^{-i\omega x_0} F[f(x)]. \end{aligned}$$

2. Fourier变换的性质

性质(5) 位移定理

$$F[e^{i\omega_0 x} f(x)] = \tilde{f}(\omega - \omega_0).$$

2. Fourier变换的性质

性质(5) 位移定理

$$F[e^{i\omega_0 x} f(x)] = \tilde{f}(\omega - \omega_0).$$

● 证明:

$$\begin{aligned} F[e^{i\omega_0 x} f(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega_0 x} f(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i(\omega - \omega_0)x} dx \\ &= \tilde{f}(\omega - \omega_0). \end{aligned}$$

2. Fourier变换的性质

- 两个函数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 的卷积定义为:

$$f_1(x) * f_2(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(x-t) dt.$$

2. Fourier变换的性质

- 两个函数 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 的卷积定义为:

$$f_1(x) * f_2(x) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(x-t) dt.$$

性质(6)卷积定理(折积定理)

$$F[f_1(x) * f_2(x)] = \sqrt{2\pi} F[f_1(x)] \cdot F[f_2(x)]$$

2. Fourier变换的性质

证明:

$$\begin{aligned} F[f_1(x) * f_2(x)] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega x} dx \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(x-t) dt \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt f_1(t) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(x-t) e^{-i\omega x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt f_1(t) \cdot e^{-i\omega t} F[f_2(x)] \\ &= \sqrt{2\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) e^{-i\omega t} dt \cdot F[f_2(x)] \\ &= \sqrt{2\pi} F[f_1(x)] \cdot F[f_2(x)]. \end{aligned}$$

2. Fourier变换的性质

- 练习: 证明 $F[f_1(x) \cdot f_2(x)] = \tilde{f}_1(\omega) * \tilde{f}_2(\omega)$

2. Fourier变换的性质

- 练习: 证明 $F[f_1(x) \cdot f_2(x)] = \tilde{f}_1(\omega) * \tilde{f}_2(\omega)$
-

$$\begin{aligned} & \tilde{f}_1(\omega) * \tilde{f}_2(\omega) \\ = & \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}_1(\omega') \tilde{f}_2(\omega - \omega') d\omega' \\ = & \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x) e^{-i\omega'x} dx \\ & \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(y) e^{-i(\omega - \omega')y} dy \end{aligned}$$

2. Fourier变换的性质

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy f_1(x) f_2(y) e^{-i\omega y} \times \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega'(x-y)} d\omega' \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy f_1(x) f_2(y) \delta(x-y) e^{-i\omega y} \\ &= F[f_1(x) \cdot f_2(x)]. \end{aligned}$$

2. Fourier变换的性质

性质(7) (作为练习)

$$F[xf(x)] = i \frac{d}{d\omega} F[f(x)] = i \frac{d}{d\omega} \tilde{f}(\omega)$$

$$F[xf'(x)] = i \frac{d}{d\omega} \{i\omega F[f(x)]\} = i \frac{d}{d\omega} [i\omega \tilde{f}(\omega)].$$

3. Fourier变换的应用举例

例1 求解积分微分方程

$$af'(x) + bf(x) + c \int_{x_0}^x f(t)dt = g(x),$$

其中, a, b, c 为常数, $g(x)$ 是已知函数.

3. Fourier变换的应用举例

例1 求解积分微分方程

$$af'(x) + bf(x) + c \int_{x_0}^x f(t)dt = g(x),$$

其中, a, b, c 为常数, $g(x)$ 是已知函数.

3. Fourier变换的应用举例

例1 求解积分微分方程

$$af'(x) + bf(x) + c \int_{x_0}^x f(t)dt = g(x),$$

其中, a, b, c 为常数, $g(x)$ 是已知函数.

● 步骤:

3. Fourier变换的应用举例

例1 求解积分微分方程

$$af'(x) + bf(x) + c \int_{x_0}^x f(t)dt = g(x),$$

其中, a, b, c 为常数, $g(x)$ 是已知函数.

● 步骤:

- ①作变换, 使原函数满足的方程变成像函数满足的方程(代数方程);

3. Fourier变换的应用举例

例1 求解积分微分方程

$$af'(x) + bf(x) + c \int_{x_0}^x f(t)dt = g(x),$$

其中, a, b, c 为常数, $g(x)$ 是已知函数.

● 步骤:

- ①作变换, 使原函数满足的方程变成像函数满足的方程(代数方程);

3. Fourier变换的应用举例

例1 求解积分微分方程

$$af'(x) + bf(x) + c \int_{x_0}^x f(t)dt = g(x),$$

其中, a, b, c 为常数, $g(x)$ 是已知函数.

● 步骤:

- ①作变换, 使原函数满足的方程变成像函数满足的方程(代数方程);
- ②求像函数;

3. Fourier变换的应用举例

例1 求解积分微分方程

$$af'(x) + bf(x) + c \int_{x_0}^x f(t)dt = g(x),$$

其中, a, b, c 为常数, $g(x)$ 是已知函数.

● 步骤:

- ①作变换, 使原函数满足的方程变成像函数满足的方程(代数方程);
- ②求像函数;

3. Fourier变换的应用举例

例1 求解积分微分方程

$$af'(x) + bf(x) + c \int_{x_0}^x f(t)dt = g(x),$$

其中, a, b, c 为常数, $g(x)$ 是已知函数.

● 步骤:

- ①作变换, 使原函数满足的方程变成像函数满足的方程(代数方程);
- ②求像函数;
- ③求反演.

3. Fourier变换的应用举例

- 令 $\tilde{f}(\omega) = F[f(x)]$, 则像函数满足

$$a(i\omega)\tilde{f}(\omega) + b\tilde{f}(\omega) + \frac{c}{i\omega}\tilde{f}(\omega) = \tilde{g}(\omega),$$

3. Fourier变换的应用举例

- 令 $\tilde{f}(\omega) = F[f(x)]$, 则像函数满足

$$a(i\omega)\tilde{f}(\omega) + b\tilde{f}(\omega) + \frac{c}{i\omega}\tilde{f}(\omega) = \tilde{g}(\omega),$$

- 则

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{i\omega\tilde{g}(\omega)}{-a\omega^2 + ib\omega + c}.$$

3. Fourier变换的应用举例

- 令 $\tilde{f}(\omega) = F[f(x)]$, 则像函数满足

$$a(i\omega)\tilde{f}(\omega) + b\tilde{f}(\omega) + \frac{c}{i\omega}\tilde{f}(\omega) = \tilde{g}(\omega),$$

- 则

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{i\omega\tilde{g}(\omega)}{-a\omega^2 + ib\omega + c}.$$

- 其中 $\tilde{g}(\omega) = F[g(x)]$, 为已知.

3. Fourier变换的应用举例

- 所以，作反演得：

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{i\omega \tilde{g}(\omega)}{-a\omega^2 + ib\omega + c} e^{i\omega x} d\omega.$$

通常利用留数定理计算此积分.

3. Fourier变换的应用举例

例2 求解一维无界空间的波动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,$$

其中 a 为常数, 表示波在空间的传播速度.

3. Fourier变换的应用举例

例2 求解一维无界空间的波动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,$$

其中 a 为常数, 表示波在空间的传播速度.

3. Fourier变换的应用举例

例2 求解一维无界空间的波动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,$$

其中 a 为常数, 表示波在空间的传播速度.

- 定解条件:

3. Fourier变换的应用举例

例2 求解一维无界空间的波动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,$$

其中 a 为常数, 表示波在空间的传播速度.

- 定解条件:
 - ①边界条件 $x \rightarrow \pm\infty, u, u_x \rightarrow 0$.

3. Fourier变换的应用举例

例2 求解一维无界空间的波动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,$$

其中 a 为常数, 表示波在空间的传播速度.

- 定解条件:
 - ①边界条件 $x \rightarrow \pm\infty, u, u_x \rightarrow 0$.

3. Fourier变换的应用举例

例2 求解一维无界空间的波动方程

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,$$

其中 a 为常数, 表示波在空间的传播速度.

- 定解条件:
 - ①边界条件 $x \rightarrow \pm\infty, u, u_x \rightarrow 0$.
 - ②初始条件 $u(x, 0) = \psi(x), u_t(x, 0) = 0$.

3. Fourier变换的应用举例

- 对空间变量 x 的函数作Fourier变换, 时间 t 视为参数, 即令

$$F[u(x, t)] = \tilde{u}(\omega, t),$$

3. Fourier变换的应用举例

- 对空间变量 x 的函数作Fourier变换, 时间 t 视为参数, 即令

$$F[u(x, t)] = \tilde{u}(\omega, t),$$

- 则方程变为

$$\tilde{u}_{tt} - a^2(i\omega)^2\tilde{u} = 0.$$

3. Fourier变换的应用举例

- 对空间变量 x 的函数作Fourier变换, 时间 t 视为参数, 即令

$$F[u(x, t)] = \tilde{u}(\omega, t),$$

- 则方程变为

$$\tilde{u}_{tt} - a^2(i\omega)^2\tilde{u} = 0.$$

- 对初始条件进行变换:

$$\tilde{\psi}(\omega) = F[\psi(x)] = F[u(x, 0)],$$

$$F[u_t(x, 0)] = 0.$$

3. Fourier变换的应用举例

- 所以, 方程是关于 $\tilde{u}$ 的谐振子, 解为

$$\tilde{u} = Ce^{i\omega at} + De^{-i\omega at}$$

C, D 为待定系数, 与 t 无关.

3. Fourier变换的应用举例

- 所以, 方程是关于 $\tilde{u}$ 的谐振子, 解为

$$\tilde{u} = Ce^{i\omega at} + De^{-i\omega at}$$

C, D 为待定系数, 与 t 无关.

- 作反演, 得

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{u}(\omega, t) e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (Ce^{i\omega at} + De^{-i\omega at}) e^{i\omega x} d\omega \end{aligned}$$

3. Fourier变换的应用举例

初始条件

$$\begin{cases} u(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (C + D)e^{i\omega x} d\omega \\ \quad = \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(\omega)e^{i\omega x} d\omega \\ u_t(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (Ci\omega a - Di\omega a)e^{i\omega x} d\omega = 0 \end{cases}$$

3. Fourier变换的应用举例

解得: $C = D = \frac{1}{2}\tilde{\psi}(\omega)$. 所以

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{\psi}(\omega)e^{i\omega at} + \tilde{\psi}(\omega)e^{-i\omega at}] e^{i\omega x} d\omega \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} [\tilde{\psi}(\omega)e^{i(x+at)\omega} + \tilde{\psi}(\omega)e^{i(x-at)\omega}] d\omega \\ &= \frac{1}{2}\psi(x+at) + \frac{1}{2}\psi(x-at). \end{aligned}$$

3. Fourier变换的应用举例

学生的问題: 计算

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

3. Fourier变换的应用举例

学生的问題: 计算

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 x} dx.$$

- 不能利用类型I的公式计算, 因为 $\frac{1}{\cos^2 x}$ 在 $[0, 2\pi]$ 上不连续!

1. Laplace变换的定义和存在条件

Laplace变换的定义

设 $\psi(t)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 即 $t < 0$ 时, $\psi(t) = 0$. 定义积分

$$\tilde{\psi}(p) = \int_0^{+\infty} \psi(t) e^{-pt} dt$$

其中 p 是复数.

1. Laplace变换的定义和存在条件

Laplace变换的定义

设 $\psi(t)$ 的定义域为 $[0, +\infty)$, 即 $t < 0$ 时, $\psi(t) = 0$. 定义积分

$$\tilde{\psi}(p) = \int_0^{+\infty} \psi(t) e^{-pt} dt$$

其中 p 是复数.

- 若在复平面 p 的某一区域上 $\tilde{\psi}(p)$ 存在, 则称 $\tilde{\psi}(p)$ 为 $\psi(t)$ 的Laplace变换.

1. Laplace变换的定义和存在条件

$\psi(t)$ 为原函数; $\tilde{\psi}(p)$ 为像函数; e^{-pt} 为变换的核. 记作:

$$\begin{aligned} L[\psi(t)] &= \tilde{\psi}(p), & \text{或} & & \psi(t) &\doteq \tilde{\psi}(p), \\ L^{-1}[\tilde{\psi}(p)] &= \psi(t); & & & \tilde{\psi}(p) &\doteq \psi(t). \end{aligned}$$

Laplace变换与Fourier变换的联系:

- 令 $p = \sigma + i\omega$, 则

$$\tilde{\psi}(p) = \int_0^{+\infty} \psi(t) e^{-\sigma t} \cdot e^{-i\omega t} dt$$

Laplace变换与Fourier变换的联系:

- 令 $p = \sigma + i\omega$, 则

$$\tilde{\psi}(p) = \int_0^{+\infty} \psi(t) e^{-\sigma t} \cdot e^{-i\omega t} dt$$

- 引入 $f(t)$,

$$f(t) = \begin{cases} \sqrt{2\pi} \psi(t) e^{-\sigma t} & , \quad t \geq 0, \\ 0 & , \quad t < 0, \end{cases}$$

Laplace变换与Fourier变换的联系:

● 则

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Laplace变换与Fourier变换的联系:

● 则

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

● 结论: $f(t)$ 的Fourier变换对应于 $\psi(t)$ 的Laplace变换!

Laplace变换与Fourier变换的联系:

书p.90–91通过在Fourier变换的基础上, 将Fourier变换的存在条件放宽, 即引入 $g(t) = e^{-\sigma t}f(t)$, 由Fourier变化过渡到Laplace变换. 这是教科书的典型作法, 非常适合初学者理解和掌握. (这个过程与上述讨论的过程恰好相反.)

1. Laplace变换的定义和存在条件

- 下面利用Fourier变换的逆变换导出Laplace变换的逆变换(反演)形式.

1. Laplace变换的定义和存在条件

- 下面利用Fourier变换的逆变换导出Laplace变换的逆变换(反演)形式.
- 由

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(p) e^{i\omega t} d\omega$$

1. Laplace变换的定义和存在条件

- 下面利用Fourier变换的逆变换导出Laplace变换的逆变换(反演)形式.
- 由

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(p) e^{i\omega t} d\omega$$

- 即

$$\sqrt{2\pi} \psi(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(p) e^{i\omega t} d\omega.$$

1. Laplace变换的定义和存在条件

$$\begin{aligned}\psi(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(p) e^{(\sigma+i\omega)t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(p) e^{pt} di\omega \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tilde{\psi}(p) e^{pt} dp. \quad (p = \sigma + i\omega)\end{aligned}$$

1. Laplace变换的定义和存在条件

Laplace变换的存在条件:

- ①在 $0 \leq t < \infty$ 的任一有限区间上, 除了有限个第一类间断点^a外, 函数 $\psi(t)$ 及其导数应处处连续;

1. Laplace变换的定义和存在条件

Laplace变换的存在条件:

- ①在 $0 \leq t < \infty$ 的任一有限区间上, 除了有限个第一类间断点^a外, 函数 $\psi(t)$ 及其导数应处处连续;

1. Laplace变换的定义和存在条件

Laplace变换的存在条件:

- ①在 $0 \leq t < \infty$ 的任一有限区间上, 除了有限个第一类间断点^a外, 函数 $\psi(t)$ 及其导数应处处连续;
- ②存在常数 $M > 0$ 和 $\sigma_0 \geq 0$, 使得

$$|\psi(t)| < Me^{\sigma_0 t},$$

其中 σ 的下界称为收敛横标, 用 σ_0 表示.

^a定义: 如果点 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点, 当 $f(x_0 + 0)$ 和 $f(x_0 - 0)$ 都存在时, 称 x_0 是 $f(x)$ 的第一类间断点.

几个初等函数的Laplace变换

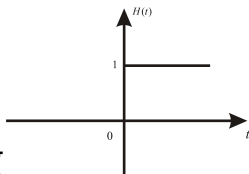
例1 阶跃函数

$$\psi(t) = H(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < +\infty, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

几个初等函数的Laplace变换

例1 阶跃函数

$$\psi(t) = H(t) = \begin{cases} 1, & 0 < t < +\infty, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$



● 跃阶函数

几个初等函数的Laplace变换.

当 $\text{Re} p > 0$ 时,

$$\begin{aligned}\tilde{\psi}(p) &= \int_0^{+\infty} e^{-pt} dt = -\frac{1}{p} e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{p}.\end{aligned}$$

几个初等函数的Laplace变换.

例2

$$\psi(t) = t, \quad 0 \leq t < +\infty.$$

几个初等函数的Laplace变换.

例2

$$\psi(t) = t, \quad 0 \leq t < +\infty.$$

•

$$\tilde{\psi}(p) = \int_0^{+\infty} te^{-pt} dt = \frac{1}{p^2},$$

当 $\text{Re} p > 0$ 时.

几个初等函数的Laplace变换.

例2

$$\psi(t) = t, \quad 0 \leq t < +\infty.$$

$$\tilde{\psi}(p) = \int_0^{+\infty} te^{-pt} dt = \frac{1}{p^2},$$

当 $\text{Re} p > 0$ 时.

- 推论: $\psi(t) = t^n \doteq \frac{n!}{p^{n+1}}, \quad \text{Re} p > 0, n \text{ 为正整数}.$

几个初等函数的Laplace变换.

例3

$$\psi(t) = e^{st}, \quad s = \text{常数}.$$

几个初等函数的Laplace变换.

例3

$$\psi(t) = e^{st}, \quad s = \text{常数}.$$



$$\tilde{\psi}(p) = \int_0^{+\infty} e^{st} e^{-pt} dt = \frac{1}{p-s},$$

当 $\text{Re } p > \text{Re } s$ 时.

几个初等函数的Laplace变换.

例4

$$\psi(t) = te^{st}, \quad s = \text{常数}.$$

几个初等函数的Laplace变换.

例4

$$\psi(t) = te^{st}, \quad s = \text{常数}.$$



$$\tilde{\psi}(t) = \int_0^{+\infty} te^{st} e^{-pt} dt = \frac{1}{(p-s)^2}, \quad \text{Re } p > \text{Re } s.$$

几个初等函数的Laplace变换.

例4

$$\psi(t) = te^{st}, \quad s = \text{常数}.$$



$$\tilde{\psi}(t) = \int_0^{+\infty} te^{st} e^{-pt} dt = \frac{1}{(p-s)^2}, \quad \text{Re } p > \text{Re } s.$$

- 推论: $\psi(t) = t^n e^{st} \doteq \frac{n!}{(p-s)^{n+1}}, \quad \text{Re } p > \text{Re } s. \quad n \text{ 为正整数}.$

2. Laplace变换的性质

性质(1) 线性

$$c_1\psi_1(t) + c_2\psi_2(t) \rightleftharpoons c_1\tilde{\psi}_1(p) + c_2\tilde{\psi}_2(p)$$

其中 c_1, c_2 为常数.

2. Laplace变换的性质

性质(2)

若 $\psi(t) \rightleftharpoons \tilde{\psi}(p)$, 则 $\psi'(t) \rightleftharpoons p\tilde{\psi}(p) - \psi(0)$.

2. Laplace变换的性质

性质(2)

若 $\psi(t) \rightleftharpoons \tilde{\psi}(p)$, 则 $\psi'(t) \rightleftharpoons p\tilde{\psi}(p) - \psi(0)$.

● 证明:

$$\begin{aligned}\psi'(t) &\rightleftharpoons \int_0^{+\infty} \psi'(t)e^{-pt} dt \\ &= \psi(t)e^{-pt} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} p\psi(t)e^{-pt} dt \\ &= p\tilde{\psi}(p) - \psi(0). \\ &\quad (\text{Re } p > \sigma_0) \text{ 或 } (\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t)e^{-pt} = 0).\end{aligned}$$

2. Laplace变换的性质

推论:

$$\begin{aligned}\psi^{(n)}(t) \quad \rightleftharpoons \quad & p^n \tilde{\psi}(p) - p^{n-1} \psi(0) - p^{n-2} \psi'(0) \\ & - \cdots - p \psi^{(n-2)}(0) - \psi^{(n-1)}(0).\end{aligned}$$

2. Laplace变换的性质

性质(3)

若 $\psi(t) \doteq \tilde{\psi}(p)$, $\Psi(t) = \int_0^t \psi(t')dt'$, 则 $\Psi(t) \doteq \frac{1}{p}\tilde{\psi}(p)$.

2. Laplace变换的性质

性质(3)

若 $\psi(t) \doteq \tilde{\psi}(p)$, $\Psi(t) = \int_0^t \psi(t')dt'$, 则 $\Psi(t) \doteq \frac{1}{p}\tilde{\psi}(p)$.

2. Laplace变换的性质

性质(3)

若 $\psi(t) \doteq \tilde{\psi}(p)$, $\Psi(t) = \int_0^t \psi(t')dt'$, 则 $\Psi(t) \doteq \frac{1}{p}\tilde{\psi}(p)$.

● 证明:

$$\Psi'(t) = \psi(t),$$

$$\Psi'(t) \doteq p\tilde{\Psi}(p) - \Psi(0) = p\tilde{\Psi}(p)$$

$$\text{其中 } \Psi(0) = \int_0^0 \psi(t')dt' = 0,$$

$$\text{即 } \psi(t) \doteq p\tilde{\Psi}(p) = \tilde{\psi}(p).$$

$$\tilde{\Psi}(p) = \frac{1}{p}\tilde{\psi}(p)$$

或

$$\Psi(t) \doteq \frac{1}{p}\tilde{\psi}(p).$$

2. Laplace变换的性质

性质(4) 延迟定理

如果 $\psi(t) \doteq \tilde{\psi}(p)$, 则 $\psi(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} \tilde{\psi}(p)$.

2. Laplace变换的性质

性质(4) 延迟定理

如果 $\psi(t) \rightleftharpoons \tilde{\psi}(p)$, 则 $\psi(t - \tau) \rightleftharpoons e^{-p\tau} \tilde{\psi}(p)$.

● 证明:

$$\begin{aligned}\psi(t - \tau) &\rightleftharpoons \int_0^{+\infty} \psi(t - \tau) e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \psi(t - \tau) e^{-p(t-\tau)} dt \cdot e^{-p\tau}\end{aligned}$$

2. Laplace变换的性质

性质(4) 延迟定理

如果 $\psi(t) \doteq \tilde{\psi}(p)$, 则 $\psi(t - \tau) \doteq e^{-p\tau} \tilde{\psi}(p)$.

● 证明:

$$\begin{aligned}\psi(t - \tau) &\doteq \int_0^{+\infty} \psi(t - \tau) e^{-pt} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \psi(t - \tau) e^{-p(t-\tau)} dt \cdot e^{-p\tau}\end{aligned}$$

● 因为 $\psi(t)$ 的定义域为 $0 \leq t < +\infty$,
即当 $0 \leq t < \tau$ 时, $\psi(t - \tau) = 0$.

2. Laplace变换的性质

● 所以

$$\begin{aligned}\psi(t - \tau) &\doteq \int_0^{\tau} \psi(t - \tau) e^{-p(t-\tau)} dt \cdot e^{-p\tau} \\ &+ \int_{\tau}^{+\infty} \psi(t - \tau) e^{-p(t-\tau)} dt \cdot e^{-p\tau}\end{aligned}$$

2. Laplace变换的性质

● 所以

$$\begin{aligned}\psi(t - \tau) &\doteq \int_0^\tau \psi(t - \tau) e^{-p(t-\tau)} dt \cdot e^{-p\tau} \\ &\quad + \int_\tau^{+\infty} \psi(t - \tau) e^{-p(t-\tau)} dt \cdot e^{-p\tau}\end{aligned}$$

● 令 $t' = t - \tau$, 则 $t : \tau, +\infty \implies t' : 0, +\infty$. 所以

$$\psi(t - \tau) \doteq \int_0^{+\infty} \psi(t') e^{-pt'} dt' \cdot e^{-p\tau} = e^{-p\tau} \tilde{\psi}(p).$$

2. Laplace变换的性质

例1

已知 $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \doteq \frac{1}{\sqrt{p}}$, 则

$$\frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \doteq \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-p\tau}.$$

2. Laplace变换的性质

性质(5) 位移定理

如果 $\psi(t) \rightleftharpoons \tilde{\psi}(p)$, 则^a $e^{-\lambda t}\psi(t) \rightleftharpoons \tilde{\psi}(p + \lambda)$.

^a证明作为练习!

2. Laplace变换的性质

性质(5) 位移定理

如果 $\psi(t) \rightleftharpoons \tilde{\psi}(p)$, 则^a $e^{-\lambda t} \psi(t) \rightleftharpoons \tilde{\psi}(p + \lambda)$.

^a证明作为练习!

例2

由 $\sin \omega t \rightleftharpoons \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$, 得 $e^{-\lambda t} \sin \omega t \rightleftharpoons \frac{\omega}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$;

由 $\cos \omega t \rightleftharpoons \frac{p}{p^2 + \omega^2}$, 得 $e^{-\lambda t} \cos \omega t \rightleftharpoons \frac{p + \lambda}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}$.

2. Laplace变换的性质

性质(6) 卷积定理

若 $\psi_1(t) \rightleftharpoons \tilde{\psi}_1(p)$, $\psi_2(t) \rightleftharpoons \tilde{\psi}_2(p)$, 则

$$\psi_1(t) * \psi_2(t) \rightleftharpoons \tilde{\psi}_1(p) \cdot \tilde{\psi}_2(p).$$

2. Laplace变换的性质

证明: 由卷积的定义得,

$$\begin{aligned}\psi_1(t) * \psi_2(t) &= \int_0^{+\infty} \psi_1(\tau) \psi_2(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t \psi_1(\tau) \psi_2(t - \tau) d\tau \\ &\quad + \int_t^{+\infty} \psi_1(\tau) \psi_2(t - \tau) d\tau\end{aligned}$$

2. Laplace变换的性质

因为 $\psi_2(t - \tau)$ 要求 $0 \leq t - \tau < +\infty$, 即 $\tau \leq t$, 所以

$$\int_t^{+\infty} \psi_1(\tau) \psi_2(t - \tau) d\tau = 0$$

因此,²

$$\psi_1(t) * \psi_2(t) = \int_0^t \psi_1(\tau) \psi_2(t - \tau) d\tau$$

²下面的证明不用此式.

2. Laplace变换的性质

$$\begin{aligned}\psi_1(t) * \psi_2(t) &\doteq \int_0^{+\infty} dt e^{-pt} \cdot \int_0^{+\infty} \psi_1(\tau) \psi_2(t - \tau) d\tau \\&= \int_0^{+\infty} d\tau \psi_1(\tau) \cdot \int_0^{+\infty} \psi_2(t - \tau) e^{-pt} dt \\&= \int_0^{+\infty} d\tau \psi_1(\tau) \cdot e^{-p\tau} \tilde{\psi}_2(p) \\&= \int_0^{+\infty} e^{-p\tau} \psi_1(\tau) d\tau \cdot \tilde{\psi}_2(p) \\&= \tilde{\psi}_1(p) \cdot \tilde{\psi}_2(p).\end{aligned}$$

2. Laplace变换的性质

性质(7)

$$t^n \psi(t) \rightleftharpoons (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \tilde{\psi}(p).$$

2. Laplace变换的性质

性质(7)

$$t^n \psi(t) \doteq (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \tilde{\psi}(p).$$

● 证明: $n = 1$ 时,

$$\begin{aligned} t\psi(t) &\doteq \int_0^{+\infty} t\psi(t)e^{-pt} dt \\ &= -\frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} \psi(t)e^{-pt} dt = (-1)^1 \frac{d}{dp} \tilde{\psi}(p). \end{aligned}$$

2. Laplace变换的性质

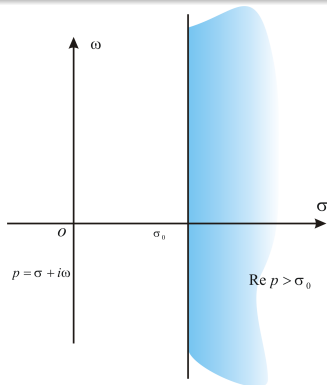
性质(8) Laplace变换像函数的解析性

$\tilde{\psi}(p)$ 是在 $\text{Re} p = \sigma > \sigma_0$ 的半平面上的解析函数.

2. Laplace变换的性质

性质(8) Laplace变换像函数的解析性

$\tilde{\psi}(p)$ 是在 $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$ 的半平面上的解析函数.



2. Laplace变换的性质

- 下面证明 $\tilde{\psi}(p)$ 在 $\text{Re } p > \sigma_0$ 区域处处可导!

2. Laplace变换的性质

- 下面证明 $\tilde{\psi}(p)$ 在 $\text{Re } p > \sigma_0$ 区域处处可导!
- 考察积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{d}{dp} [\psi(t)e^{-pt}] dt$$

2. Laplace变换的性质

- 因为要求 $|\psi(t)| < Me^{+\sigma_0 t}$, 则

$$\begin{aligned} \left| \int_0^{+\infty} \frac{d}{dp} [\psi(t)e^{-pt}] dt \right| &\leq \int_0^{+\infty} |\psi(t)| te^{-\sigma t} dt \\ &< M \int_0^{+\infty} te^{-(\sigma-\sigma_0)t} dt \\ &= \frac{M}{(\sigma - \sigma_0)^2}, \end{aligned}$$

其中 $\sigma > \sigma_0$.

2. Laplace变换的性质

● 因此,

$$\int_0^{+\infty} \frac{d}{dp} [\psi(t)e^{-pt}] dt$$

是一致收敛的, 可以交换求导与积分的次序,
即

$$\frac{d}{dp} \tilde{\psi}(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} \psi(t)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dp} [\psi(t)e^{-pt}] dt$$

2. Laplace变换的性质

- 因此,

$$\int_0^{+\infty} \frac{d}{dp} [\psi(t)e^{-pt}] dt$$

是一致收敛的, 可以交换求导与积分的次序,
即

$$\frac{d}{dp} \tilde{\psi}(p) = \frac{d}{dp} \int_0^{+\infty} \psi(t)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \frac{d}{dp} [\psi(t)e^{-pt}] dt$$

- 上式表明: $\tilde{\psi}(p)$ 在 $\text{Re} p > \sigma_0$ 的半平面上处处可导, 即 $\tilde{\psi}(p)$ 是区域 $\text{Re} p > \sigma_0$ 的解析函数.

3. Laplace变换的反演

方法(1) 查表法

书p.394 – 396

3. Laplace变换的反演

方法(1) 查表法

书p.394 – 396

例1

计算 $\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{a}{p}}e^{-p\tau}$ 的原函数.

3. Laplace变换的反演

- 由表中查出:

$$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{a}{p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos 2 \sqrt{at}$$

3. Laplace变换的反演

- 由表中查出:

$$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{a}{p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos 2 \sqrt{at}$$

- 再利用延迟定理:

$$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{a}{p}} e^{-p\tau} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi(t-\tau)}} \cos 2 \sqrt{a(t-\tau)}.$$

3. Laplace变换的反演

方法(2) 有理分式的反演

把有理分式分成部分分式, 然后再用已知的公式.

3. Laplace变换的反演

方法(2) 有理分式的反演

把有理分式分成部分分式, 然后再用已知的公式.

例2

计算 $\frac{1}{p^3(p+\alpha)}$ 的反演.

3. Laplace变换的反演

设上式可分解成:

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^3(p+\alpha)} &= \frac{A}{p^3} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p} + \frac{D}{p+\alpha} \\ &= \frac{A(p+\alpha) + Bp(p+\alpha) + Cp^2(p+\alpha) + Dp^3}{p^3(p+\alpha)} \\ &= \frac{A\alpha + (A+B\alpha)p + (B+C\alpha)p^2 + (C+D)p^3}{p^3(p+\alpha)}\end{aligned}$$

3. Laplace变换的反演

- 比较系数得: $A = \frac{1}{\alpha}$, $B = -\frac{1}{\alpha^2}$, $C = \frac{1}{\alpha^3}$, $D = -\frac{1}{\alpha^3}$.

3. Laplace变换的反演

- 比较系数得: $A = \frac{1}{\alpha}$, $B = -\frac{1}{\alpha^2}$, $C = \frac{1}{\alpha^3}$, $D = -\frac{1}{\alpha^3}$.
- 所以

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^3(p+\alpha)} &= \frac{1}{\alpha} \frac{1}{p^3} - \frac{1}{\alpha^2} \frac{1}{p^2} + \frac{1}{\alpha^3} \frac{1}{p} - \frac{1}{\alpha^3} \frac{1}{p+\alpha} \\ &\doteq \frac{1}{2\alpha} t^2 - \frac{1}{\alpha^2} t + \frac{1}{\alpha^3} - \frac{1}{\alpha^3} e^{-\alpha t}.\end{aligned}$$

3. Laplace变换的反演

- 几个常用的反演公式:

$$\frac{1}{p^{n+1}} \doteq \frac{t^n}{n!}, \quad \frac{1}{(p-s)^{n+1}} \doteq \frac{t^n}{n!} e^{st}.$$

3. Laplace变换的反演

- 几个常用的反演公式:

$$\frac{1}{p^{n+1}} \doteq \frac{t^n}{n!}, \quad \frac{1}{(p-s)^{n+1}} \doteq \frac{t^n}{n!} e^{st}.$$

3. Laplace变换的反演

● 几个常用的反演公式:

$$\frac{1}{p^{n+1}} \doteq \frac{t^n}{n!}, \quad \frac{1}{(p-s)^{n+1}} \doteq \frac{t^n}{n!} e^{st}.$$

$$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \doteq \sin \omega t, \quad \frac{p}{p^2 + \omega^2} \doteq \cos \omega t,$$

3. Laplace变换的反演

● 几个常用的反演公式:

$$\frac{1}{p^{n+1}} \doteq \frac{t^n}{n!}, \quad \frac{1}{(p-s)^{n+1}} \doteq \frac{t^n}{n!} e^{st}.$$

$$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2} \doteq \sin \omega t, \quad \frac{p}{p^2 + \omega^2} \doteq \cos \omega t,$$

$$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2} \doteq \sinh \omega t, \quad \frac{p}{p^2 - \omega^2} \doteq \cosh \omega t,$$

其中 ω 为实数.

3. Laplace变换的反演

$$\frac{1}{ap^2 + bp + c} \doteq \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{b^2 - 4ac}} e^{-\frac{b}{2a}t} \sinh \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} t, & b^2 - 4ac > 0. \\ \frac{1}{a} t e^{-\frac{b}{2a}t}, & b^2 - 4ac = 0. \\ \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} e^{-\frac{b}{2a}t} \sin \frac{\sqrt{4ac - b^2}}{2a} t, & b^2 - 4ac < 0. \end{cases}$$

3. Laplace变换的反演

方法(3)

利用Laplace变换的性质

3. Laplace变换的反演

方法(3)

利用Laplace变换的性质

例3

求反演 $\frac{e^{-ap}}{p(p+b)}$, a, b 为常数.

3. Laplace变换的反演

● 方法一:

$$\begin{aligned}\frac{e^{-ap}}{p(p+b)} &= \frac{1}{b} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+b} \right) e^{-ap} \\ &= \frac{1}{b} \frac{1}{p} e^{-ap} - \frac{1}{b} \frac{1}{p+b} e^{-ap}\end{aligned}$$

3. Laplace变换的反演

- 方法一:

$$\begin{aligned}\frac{e^{-ap}}{p(p+b)} &= \frac{1}{b} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+b} \right) e^{-ap} \\ &= \frac{1}{b} \frac{1}{p} e^{-ap} - \frac{1}{b} \frac{1}{p+b} e^{-ap}\end{aligned}$$

- 因为 $\frac{1}{p} \doteq H(t)$ 为阶跃函数, $\frac{1}{p+b} \doteq H(t)e^{-bt}$,

3. Laplace变换的反演

- 所以, 再利用延迟定理得

$$\begin{aligned}\frac{e^{-ap}}{p(p+b)} &\doteq \frac{1}{b}H(t-a) - \frac{1}{b}H(t-a)e^{-b(t-a)} \\ &= \frac{1}{b}H(t-a)\left[1 - e^{-b(t-a)}\right].\end{aligned}$$

3. Laplace变换的反演

● 方法二: 利用卷积定理

$$\frac{e^{-ap}}{p(p+b)} = \frac{1}{p} e^{-ap} \cdot \frac{1}{p+b}$$

3. Laplace变换的反演

- 方法二: 利用卷积定理

$$\frac{e^{-ap}}{p(p+b)} = \frac{1}{p}e^{-ap} \cdot \frac{1}{p+b}$$

- 因为

$$\frac{1}{p}e^{-ap} \doteq H(t-a), \quad \frac{1}{p+b} \doteq e^{-bt}H(t)$$

3. Laplace变换的反演

所以

$$\begin{aligned}\frac{e^{-ap}}{p(p+b)} &\doteq \int_0^t H(\tau-a) \cdot H(t-\tau) e^{-b(t-\tau)} d\tau \\ &= \int_0^a H(\tau-a) H(t-\tau) e^{-b(t-\tau)} d\tau \\ &\quad + \int_a^t H(\tau-a) H(t-\tau) e^{-b(t-\tau)} d\tau\end{aligned}$$

3. Laplace变换的反演

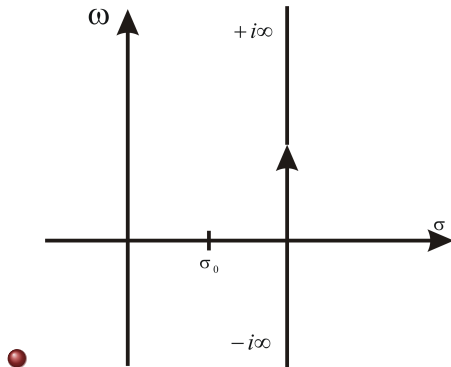
$$\begin{aligned} &= \int_a^t H(\tau - a) e^{-b(t-\tau)} d\tau \\ &= H(t - a) \int_a^t e^{-b(t-\tau)} d\tau \\ &= \frac{1}{b} H(t - a) \left[1 - e^{-b(t-a)} \right]. \end{aligned}$$

3. Laplace变换的反演

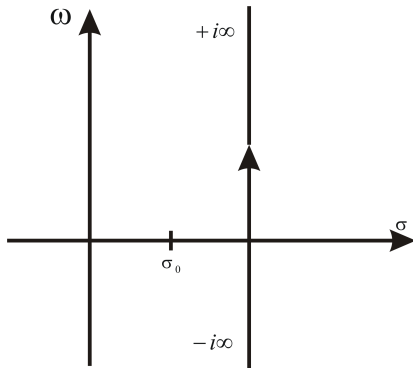
方法(4)普遍反演公式 (Riemann-Mellin公式)

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \tilde{\psi}(p) e^{pt} dp, \quad p = \sigma + i\omega$$

3. Laplace变换的反演



3. Laplace变换的反演



- 计算上述积分时, 要用留数定理. 详见书 $p.97 - 99$. (学生自学)

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

例1 求解 $t\frac{d^2y}{dt^2} + (1-n)\frac{dy}{dt} + y = 0$, 其中定解条件为:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

例1 求解 $t \frac{d^2 y}{dt^2} + (1-n) \frac{dy}{dt} + y = 0$, 其中定解条件为:

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

● 解: 令 $y(t) \doteq \tilde{y}(p)$, 对上述方程作Laplace变换:

$$\begin{aligned} & -\frac{d}{dp} [p^2 \tilde{y}(p) - py(0) - y'(0)] \\ & + (1-n)[p\tilde{y}(p) - y(0)] + \tilde{y}(p) = 0 \end{aligned}$$

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

- 化简得

$$p^2 \frac{d\tilde{y}}{dp} + [(1+n)p - 1]\tilde{y} = 0.$$

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

- 化简得

$$p^2 \frac{d\tilde{y}}{dp} + [(1+n)p - 1]\tilde{y} = 0.$$

- Laplace变换的作用: 将二阶微分方程化简(降阶)为一阶微分方程!

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

- 利用分离变数法:

$$\frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} = -\frac{(1+n)p-1}{p^2}dp,$$

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

- 利用分离变数法:

$$\frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} = -\frac{(1+n)p-1}{p^2}dp,$$

- 两端积分:

$$\ln \tilde{y} = -(1+n) \ln p - \frac{1}{p} + \ln c,$$

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

- 利用分离变数法:

$$\frac{d\tilde{y}}{\tilde{y}} = -\frac{(1+n)p-1}{p^2}dp,$$

- 两端积分:

$$\ln \tilde{y} = -(1+n) \ln p - \frac{1}{p} + \ln c,$$

- 所以

$$\tilde{y}(p) = c \frac{1}{p^{n+1}} e^{-\frac{1}{p}}.$$

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

- 查表 (见书 $p.396$, $No.29$) 得:

$$y(t) = ct^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}),$$

其中 J_n 表示 n 阶 Bessel 函数.

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

- 查表 (见书 $p.396$, No.29) 得:

$$y(t) = ct^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t}),$$

其中 J_n 表示 n 阶 Bessel 函数.

- 注解: 虽然有两个定解条件, 但是齐次方程的解仍可相差一个比例系数. 若 $y_0(t) = t^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t})$ 为解, 则 $cy_0(t)$ 一定也是解, 因为将方程两端同乘 c ($c \neq 0$) 可看出.

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

例2 求解电路方程

$$L \frac{dj}{dt} + Rj + \frac{1}{C} \int_0^t j dt = E, \quad j(0) = 0.$$

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

例2 求解电路方程

$$L \frac{dj}{dt} + Rj + \frac{1}{C} \int_0^t j dt = E, \quad j(0) = 0.$$

● 解: 作Laplace变换:

$$Lp\tilde{j}(p) + R\tilde{j}(p) + \frac{1}{Cp}\tilde{j}(p) = \frac{E}{p}.$$

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

例2 求解电路方程

$$L \frac{dj}{dt} + Rj + \frac{1}{C} \int_0^t j dt = E, \quad j(0) = 0.$$

- 解: 作Laplace变换:

$$Lp\tilde{j}(p) + R\tilde{j}(p) + \frac{1}{Cp}\tilde{j}(p) = \frac{E}{p}.$$

- 将微分方程化简为代数方程! 所以

$$\tilde{j}(p) = \frac{E}{Lp^2 + Rp + \frac{1}{C}}.$$

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

● 反演得,

$$j(t) = \begin{cases} \frac{2E}{\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sinh \frac{\sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} t, & R^2 - \frac{4L}{C} > 0 \\ \frac{E}{L} t e^{-\frac{R}{2L}t}, & R^2 - \frac{4L}{C} = 0, \\ \frac{2E}{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}} e^{-\frac{R}{2L}t} \sin \frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L} t, & R^2 - \frac{4L}{C} < 0. \end{cases}$$

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

问题: 书p.73 第7题.

关键: 由条件 $f'(0) = 0, f(l) = 0$ 选取Fourier级数展开的本征函数!

设本征函数为: $X(x) = \cos \omega x$ (因为 $f'(0) = 0$), 再利用 $f(l) = 0$, 即 $X(l) = 0$, 得 $\cos \omega l = 0$.

由此定出 $\omega = \frac{2n+1}{2l}\pi$, 其中 $n = 0, 1, 2, \dots$.

所以 $X(x) = \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l}x$,

因此, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos \frac{(2n+1)\pi}{2l}x$.

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

例3

求解谐振子方程及其推广的非齐次形式.

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

例3

求解谐振子方程及其推广的非齐次形式.

- 谐振子方程:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

例3

求解谐振子方程及其推广的非齐次形式.

- 谐振子方程:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = 0.$$

- 两端作Laplace变换:

$$p^2 \tilde{x}(p) - px(0) - \dot{x}(0) + \omega^2 \tilde{x}(p) = 0.$$

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

- 即像函数为,

$$\tilde{x}(p) = x(0) \frac{p}{p^2 + \omega^2} + \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

- 即像函数为,

$$\tilde{x}(p) = x(0) \frac{p}{p^2 + \omega^2} + \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

- 所以

$$x(t) = x(0) \cos \omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin \omega t,$$

其中 $x(0)$, $\dot{x}(0)$ 分别表示振子的初始坐标和初始速度.

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

- 推广到最简单的非齐次形式:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = c$$

其中 c 为常数.

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

- 推广到最简单的非齐次形式:

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = c$$

其中 c 为常数.

- 同上, 两端作Laplace变换,

$$p^2 \tilde{x}(p) - px(0) - \dot{x}(0) + \omega^2 \tilde{x}(p) = c \cdot \frac{1}{p}.$$

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

- 像函数为,

$$\tilde{x}(p) = \frac{c}{\omega} \frac{1}{p} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} + x(0) \frac{p}{p^2 + \omega^2} + \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}.$$

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

● 因为

$$\begin{aligned}\frac{1}{p} \cdot \frac{\omega}{p^2 + \omega^2} &\doteq \int_0^t H(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau \\ &= \int_0^t H(t) \sin(\omega t - \omega \tau) d\tau \\ &= \frac{1}{\omega} \cos(\omega t - \omega \tau) \Big|_0^t \\ &= \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega} \cos \omega t.\end{aligned}$$

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

● 所以

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{c}{\omega} \frac{1}{\omega} (1 - \cos \omega t) + x(0) \cos \omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin \omega t \\&= \frac{c}{\omega^2} + \left(x(0) - \frac{c}{\omega^2} \right) \cos \omega t + \frac{\dot{x}(0)}{\omega} \sin \omega t.\end{aligned}$$

4. Laplace变换应用举例(解微分方程)

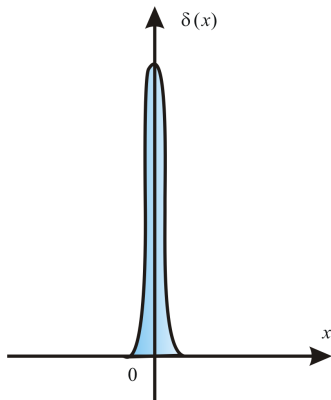
思考题: 试求解下列的二维耦合方程,

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + 2\omega\dot{y}(t) - \omega^2x(t) = c_1, \\ \ddot{y}(t) - 2\omega\dot{x}(t) - \omega^2y(t) = c_2, \end{cases}$$

其中 c_1, c_2, ω 为常数.

1. δ 函数的定义

δ 函数图示



1. δ 函数的定义

一维形式:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0, \\ \infty, & x = x_0, \end{cases}$$

1. δ 函数的定义

一维形式:

$$\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0, \\ \infty, & x = x_0, \end{cases}$$

● 且要求

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) dx = \int_{x_0 - \varepsilon}^{x_0 + \varepsilon} \delta(x - x_0) dx = 1.$$

1. δ 函数的定义

二维形式:

$$\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_0) = \begin{cases} 0, & \vec{\rho} \neq \vec{\rho}_0, \\ \infty, & \vec{\rho} = \vec{\rho}_0, \end{cases}$$

³直角坐标中的形式.

1. δ 函数的定义

二维形式:

$$\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_0) = \begin{cases} 0, & \vec{\rho} \neq \vec{\rho}_0, \\ \infty, & \vec{\rho} = \vec{\rho}_0, \end{cases}$$

● 且要求

$$\int_D \delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_0) d\vec{\rho} = 1, \quad D \text{ 包含 } \vec{\rho}_0,$$

其中³ $\delta(\vec{\rho} - \vec{\rho}_0) \equiv \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)$.

³直角坐标中的形式.

1. δ 函数的定义

极坐标中的形式:

$$\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) = \frac{1}{\rho}\delta(\rho - \rho_0)\delta(\varphi - \varphi_0)$$

或

$$\delta(\vec{\rho}) = \frac{1}{\pi\rho}\delta(\rho)$$

1. δ 函数的定义

极坐标中的形式:

$$\delta(x - x_0)\delta(y - y_0) = \frac{1}{\rho}\delta(\rho - \rho_0)\delta(\varphi - \varphi_0)$$

或

$$\delta(\vec{\rho}) = \frac{1}{\pi\rho}\delta(\rho)$$

- 当 $\rho_0 \rightarrow 0$ 时, φ_0 无意义. 因此, 常用径向 $\delta(\rho)$ 代替 $\delta(\vec{\rho})$.

1. δ 函数的定义

三维形式:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$$

$$(\text{直角坐标中}) = \delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)$$

$$(\text{球坐标中}) = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \delta(r - r_0)\delta(\theta - \theta_0)\delta(\varphi - \varphi_0)$$

$$(\text{柱坐标中}) = \frac{1}{\rho} \delta(\rho - \rho_0)\delta(\varphi - \varphi_0)\delta(z - z_0)$$

1. δ 函数的定义

可以证明,

$$\delta(\vec{r}) = \frac{1}{2\pi r^2} \delta(r).$$

2. δ 函数的性质

性质(1) $\delta(x)$ 是偶函数, $\delta'(x)$ 是奇函数.

$$\delta(x) = \delta(-x), \quad \delta'(x) = -\delta'(-x)$$

2. δ 函数的性质

性质(1) $\delta(x)$ 是偶函数, $\delta'(x)$ 是奇函数.

$$\delta(x) = \delta(-x), \quad \delta'(x) = -\delta'(-x)$$

● 证明: 因为

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) dx = \int_{+\varepsilon}^{-\varepsilon} \delta(-x) d(-x) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(-x) dx = 1.$$

2. δ 函数的性质

性质(1) $\delta(x)$ 是偶函数, $\delta'(x)$ 是奇函数.

$$\delta(x) = \delta(-x), \quad \delta'(x) = -\delta'(-x)$$

● 证明: 因为

$$\int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(x) dx = \int_{+\varepsilon}^{-\varepsilon} \delta(-x) d(-x) = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(-x) dx = 1.$$

● 所以

$$\delta(x) = \delta(-x).$$

2. δ 函数的性质

性质(2) 对于在 x_0 点连续的任何函数 $f(x)$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0).$$

或在积分意义下, 理解为:

$$f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)\delta(x-x_0).$$

2. δ 函数的性质

性质(2) 对于在 x_0 点连续的任何函数 $f(x)$, 有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)dx = f(x_0).$$

或在积分意义下, 理解为:

$$f(x)\delta(x-x_0) = f(x_0)\delta(x-x_0).$$

● 特例:

$$x\delta(x-x_0) = x_0\delta(x-x_0), \quad x\delta(x) = 0.$$

2. δ 函数的性质

性质(3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x-x_0)dx = -f'(x_0).$$

2. δ 函数的性质

性质(3)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta'(x-x_0)dx = -f'(x_0).$$

● 一般情形:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta^{(n)}(x-x_0)dx = (-1)^n f^{(n)}(x_0).$$

2. δ 函数的性质

证明:

$$\begin{aligned}& \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta'(x - x_0) dx \\&= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) d\delta(x - x_0) \\&= f(x) \delta(x - x_0) \Big|_{-\infty}^{+\infty} - \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) f'(x) dx \\&= -f'(x_0).\end{aligned}$$

2. δ 函数的性质

性质(4) 若函数 $\phi(x) = 0$ 有 n 个单根 x_k , 其中 $k = 1, 2, \dots, n$, 则

$$\delta[\phi(x)] = \sum_{k=1}^n \frac{\delta(x - x_k)}{|\phi'(x_k)|}.$$

2. δ 函数的性质

性质(4) 若函数 $\phi(x) = 0$ 有 n 个单根 x_k , 其中 $k = 1, 2, \dots, n$, 则

$$\delta[\phi(x)] = \sum_{k=1}^n \frac{\delta(x - x_k)}{|\phi'(x_k)|}.$$

● 证明:

$$\delta[\phi(x)] = \begin{cases} 0, & \text{当}\phi(x) \neq 0, \\ \infty, & \text{当}\phi(x) = 0. \end{cases}$$

2. δ 函数的性质

• 且

$$\int_{\phi(x_k - \epsilon)}^{\phi(x_k + \epsilon)} \delta[\phi(x)] d\phi(x) = 1,$$

当 $\phi(x_k + \epsilon) > \phi(x_k - \epsilon)$.

2. δ 函数的性质

- 且

$$\int_{\phi(x_k - \varepsilon)}^{\phi(x_k + \varepsilon)} \delta[\phi(x)] d\phi(x) = 1,$$

当 $\phi(x_k + \varepsilon) > \phi(x_k - \varepsilon)$.

- 由于 x_k 均为 $\phi(x) = 0$ 的单根, 可设

$$\delta[\phi(x)] = \sum_{k=1}^n c_k \delta(x - x_k).$$

2. δ 函数的性质

两端对 x 积分:

$$\int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \delta[\phi(x)] dx = \sum_{k=1}^n c_k \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \delta(x - x_k) dx = c_i.$$

2. δ 函数的性质

即

$$\begin{aligned} c_i &= \int_{x_i-\varepsilon}^{x_i+\varepsilon} \delta[\phi(x)] dx \\ &= \int_{\phi(x_i-\varepsilon)}^{\phi(x_i+\varepsilon)} \delta[\phi(x)] \frac{d\phi(x)}{\phi'(x)} \quad (dx \rightarrow \frac{d\phi(x)}{\phi'(x)}) \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\phi'(x_i)}, & \phi(x_i + \varepsilon) > \phi(x_i - \varepsilon), \quad \phi' > 0 \\ -\frac{1}{\phi'(x_i)}, & \phi(x_i + \varepsilon) < \phi(x_i - \varepsilon), \quad \phi' < 0 \end{cases} \\ &= \frac{1}{|\phi'(x_i)|}. \end{aligned}$$

2. δ 函数的性质

- 注: x_k 为 $\phi(x) = 0$ 的单根保证了 $\phi'(x_k) \neq 0$.

2. δ 函数的性质

- 注: x_k 为 $\phi(x) = 0$ 的单根保证了 $\phi'(x_k) \neq 0$.

特例:

$$\delta(ax) = \frac{\delta(x)}{|a|}, \quad \delta(x^2 - a^2) = \frac{\delta(x + a) + \delta(x - a)}{2|a|}.$$

3. δ 函数的一些表达式

- 注: 以下表达式在积分意义下成立.

3. δ 函数的一些表达式

- 注: 以下表达式在积分意义下成立.

表达式(1)

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{\pi\alpha^2}} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}$$

3. δ 函数的一些表达式

- 注: 以下表达式在积分意义下成立.

表达式(1)

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{\pi\alpha^2}} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}$$

- 当 $x = 0$ 时, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{\pi\alpha^2}} e^{-x^2/\alpha^2} \big|_{x=0} = \infty$.

3. δ 函数的一些表达式

- 注: 以下表达式在积分意义下成立.

表达式(1)

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{\pi\alpha^2}} e^{-\frac{x^2}{\alpha^2}}$$

- 当 $x = 0$ 时, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{\pi\alpha^2}} e^{-x^2/\alpha^2} \big|_{x=0} = \infty$.
- 当 $x \neq 0$ 时, $\lim_{\alpha \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{\pi\alpha^2}} e^{-x^2/\alpha^2} = 0$.

3. δ 函数的一些表达式

下面考察积分的有限性,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \sqrt{\frac{1}{\pi\alpha^2}} e^{-x^2/\alpha^2} dx \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{1}{\pi\alpha^2}} e^{-x^2/\alpha^2} dx \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt \quad (t \equiv x/|\alpha|) \\ &= 1. \end{aligned}$$

3. δ 函数的一些表达式

表达式(2)

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x}.$$

3. δ 函数的一些表达式

表达式(2)

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x}.$$

● 当 $x = 0$ 时, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha \sin \alpha x}{\pi \alpha x} = \infty.$

3. δ 函数的一些表达式

表达式(2)

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x}.$$

- 当 $x = 0$ 时, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\pi} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \infty.$
- 当 $x \neq 0$ 时, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin \alpha x}{x} = 0.$

3. δ 函数的一些表达式

表达式(2)

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin \alpha x}{\pi x}.$$

- 当 $x = 0$ 时, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{\pi} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} = \infty$.
- 当 $x \neq 0$ 时, $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin \alpha x}{x} = 0$.
- 积分的有限性,

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\sin \alpha x}{x} dx = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} d\alpha x = 1.$$

3. δ 函数的一些表达式

表达式(3)

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\alpha}{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} e^{-i\alpha x^2}.$$

表达式(4)

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}.$$

表达式(5)

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow +0} \frac{e^{-r/\alpha}}{\alpha}, \quad r \geq 0.$$

3. δ 函数的一些表达式

表达式(6)

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{\alpha x}{2}}{(\frac{\alpha x}{2})^2}.$$

3. δ 函数的一些表达式

表达式(6)

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\alpha}{2\pi} \frac{\sin^2 \frac{\alpha x}{2}}{(\frac{\alpha x}{2})^2}.$$

● 证明时用到

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \frac{\pi}{2}.$$

3. δ 函数的一些表达式

表达式(7)

$$\delta(r) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r^2}{2\alpha^3} e^{-r/\alpha}, \quad r \geq 0.$$

3. δ 函数的一些表达式

表达式(7)

$$\delta(r) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r^2}{2\alpha^3} e^{-r/\alpha}, \quad r \geq 0.$$

表达式(8)

$$\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx},$$

3. δ 函数的一些表达式

表达式(7)

$$\delta(r) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{r^2}{2\alpha^3} e^{-r/\alpha}, \quad r \geq 0.$$

表达式(8)

$$\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx},$$



$$H(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

3. δ 函数的一些表达式

表达式(9)

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x),$$

3. δ 函数的一些表达式

表达式(9)

$$\delta(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x),$$



$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{1}{\varepsilon}, & 0 \leq x \leq \varepsilon, \\ 0, & x > \varepsilon. \end{cases}$$

4. δ 函数的广义Fourier变换

- 形式上推导:

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

4. δ 函数的广义Fourier变换

- 形式上推导:

$$\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} c(\omega) e^{i\omega x} d\omega,$$

- 其中

$$c(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x) e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

4. δ 函数的广义Fourier变换

● 所以

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega.$$

4. δ 函数的广义Fourier变换

- 所以

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega.$$

- 注: 严格意义下, 上述积分并不存在, 但 δ 函数可以表示成某些函数的极限形式(见第2节), 而那些函数的Fourier变换是存在的!

4. δ 函数的广义Fourier变换

引入收敛因子 $\alpha > 0$, 按下式来理解 $\delta(x)$ 的Fourier变换!

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega &\rightarrow \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{\alpha\omega + i\omega x} d\omega \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{+\infty} e^{-\alpha\omega + i\omega x} d\omega \right] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \left[e^{(\alpha+ix)\omega} / (\alpha+ix) \Big|_{-\infty}^0 \right. \\ &\quad \left. + e^{(-\alpha+ix)\omega} / (-\alpha+ix) \Big|_0^{+\infty} \right] \end{aligned}$$

4. δ 函数的广义Fourier变换

$$\begin{aligned} &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \left[\frac{1}{\alpha + ix} - \frac{1}{-\alpha + ix} \right] \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}. \end{aligned}$$

4. δ 函数的广义Fourier变换

- 由第3节表达式(4)知,

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}.$$

4. δ 函数的广义Fourier变换

- 由第3节表达式(4)知,

$$\delta(x) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + x^2}.$$

- 所以, 引入收敛因子 $\alpha > 0$ 后,

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega x} d\omega$$

是有意义的!

4. δ 函数的广义Fourier变换

● 另外,

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-x_0)} d\omega.$$

4. δ 函数的广义Fourier变换

- 另外,

$$\delta(x - x_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(x-x_0)} d\omega.$$

- 三维形式的展开:

$$\delta(\vec{r} - \vec{r}_0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\vec{k} \cdot (\vec{r} - \vec{r}_0)} d\vec{k}.$$