

数学物理方法讲义

缪炎刚

南开大学物理科学学院

February 1, 2017

目录 I

1 一、复变函数的一般概念

- 1.复数及其运算
 - 1.1 复数的定义及表达式
 - 1.2 复数的运算
 - 1.3 复数的几何表示
- 2.复变函数
 - 2.1 复变函数的定义和连续性
 - 2.2 常见的初等复变函数
- 3.多值函数(学生自学)
 - 3.1 为什么讲多值函数?

2 二、复变函数的导数

- 1.导数

目录 II

- 1.1 定义、求导规则和公式
- 1.2 *Cauchy – Riemann*条件
- 1.3 复变函数可导的充要条件
- 1.4 奇点、孤立奇点
- 2.解析函数
 - 2.1 解析函数的定义
 - 2.2 解析函数的充要条件
 - 2.3 解析函数的性质
 - 2.4 解析函数在物理上的应用

3

三、复变函数的积分

- 1.复变函数的积分
 - 1.1 复变函数积分的定义
 - 1.2 复变函数积分的性质

目录 III

- 2. *Cauchy*定理
 - 2.1 单连通区域的*Cauchy*定理
 - 2.2 复连通区域的*Cauchy*定理
- 3. *Cauchy*积分公式
 - 3.1 *Cauchy*积分公式的形式
 - 3.2 *Cauchy*积分公式的推论

4

四、复数级数

- 1. 复数级数的一般概念
 - 1.1 数项级数
- 2. 幂级数
 - 2.1 正幂级数
 - 2.2 一般幂级数

目录 IV

- 2.3 幂级数与解析函数的关系
- 3 泰勒(*Taylor*)级数
 - 3.1 泰勒(*Taylor*)级数的形式
 - 3.2 *Taylor*级数的展开方式
- 4 罗朗(*Laurent*)级数
 - 4.1 罗朗级数的形式
 - 4.2 *Laurent*级数的展开方式
 - 4.3 无穷远点邻域的*Laurent*级数
 - 4.4 奇点分类

5

五、留数定理

- 1. 留数定理
 - 1.1 留数

目录 V

- 1.2 留数定理
- 1.3 留数的计算
- 2. 利用留数定理计算实变函数的定积分
 - 2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

复变函数的一般概念

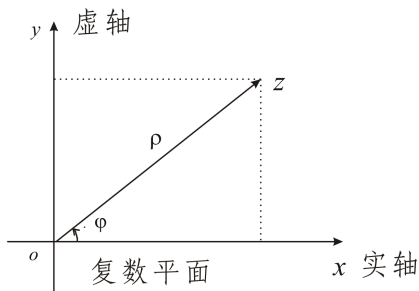
第一章、复变函数的一般概念

1.1 复数的定义及表达式

遵循一定运算规则的一对(两个)有序实数

$$z = x + iy, \quad x, y \in R$$

$$x = \operatorname{Re} z, \quad y = \operatorname{Im} z$$



1.1 复数的定义及表达式

三种表达形式

$$z = x + iy$$

$$= \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

(利用了Euler公式)

$$= \rho e^{i\varphi}$$

代数式

三角式

指数式

1.1 复数的定义及表达式

三种表达形式

$$\begin{aligned}
 z &= x + iy && \text{代数式} \\
 &= \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) && \text{三角式} \\
 &= \rho e^{i\varphi} && \text{指数式}
 \end{aligned}$$

(利用了Euler公式)

- 模 $|z| = \rho$, $\text{Arg}z = \varphi$ 为辐角, 辐角不唯一.

$$\varphi = \text{Arg}z = \arg z + 2k\pi$$

其中 $k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \arg z < 2\pi$.

1.1 复数的定义及表达式

例1 奇妙的等式：

$$e^{i\pi} = -1$$

奇妙之处：

$$e = 2.718\dots$$

自然对数的底数

$$\pi = 3.1415\dots$$

圆周率

$$i = \sqrt{-1}$$

虚单位

1.1 复数的定义及表达式

例1 奇妙的等式：

$$e^{i\pi} = -1$$

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots,$$

$$\pi = \frac{\text{圆周长}}{\text{直径}}$$

毫无关系的这三者的组合 $e^{i\pi}$ 恰好等于一个整数——1的奇妙！

1.1 复数的定义及表达式

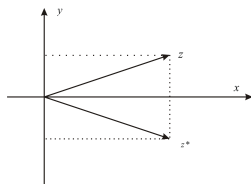
例2 两个特殊的复数

$$\begin{aligned}
 0 : \quad & x = y = 0; \quad \rho = 0, \quad \varphi \text{ 不确定.} \\
 \infty : \quad & x = \pm\infty, \quad y \text{ 任意;} \\
 & x \text{ 任意,} \quad y = \pm\infty; \\
 & \rho = \infty, \quad \varphi \text{ 不确定.}
 \end{aligned}$$

性质: 复数域内, 除了实数以外, 是不能比较大小的.

1.1 复数的定义及表达式

共轭复数(复共轭):



若 $z = x + iy$, 则

$$\begin{aligned} z^* &\equiv \bar{z} = x - iy \\ &= \rho(\cos \varphi - i \sin \varphi) \\ &= \rho e^{-i\varphi}. \end{aligned}$$

称为 z 的复共轭.

1.1 复数的定义及表达式

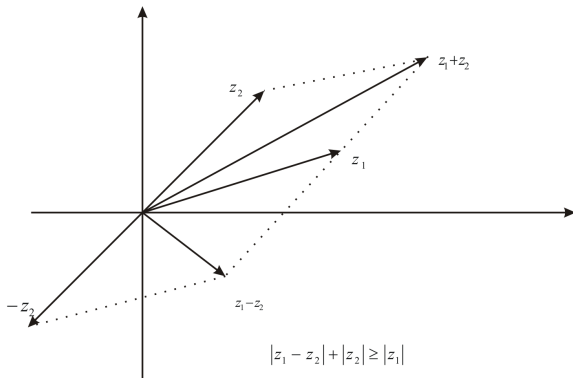
- z 与 z^* 的几何关系: z^* 是 z 的关于 x 轴的镜像映射.

1.1 复数的定义及表达式

- z 与 z^* 的几何关系: z^* 是 z 的关于 x 轴的镜像映射.
- †提高内容
 数学上, 复数对应于二元数. 即, 在正交基 $(1, i)$ 上的线性组合 $z = x + iy$. z 由两个实数 x, y 完全确定.
 数学上, 定义四元数为在正交基 $(1, I, J, K)$ 上的线性组合 $Z = a + bI + cJ + dK$. Z 由四个实数 a, b, c, d 完全确定, 其中 $I^2 = J^2 = K^2 = -1$.
 四元数在量子理论中有相应的应用.

1.2 复数的运算

复数的和与差图示



1.2 复数的运算—和与差

z_1 与 z_2 的和定义为:

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2.$$

则 $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2).$

性质:

交换律和结合律成立.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

1.2 复数的运算—和与差

z_1 与 z_2 的差定义为:

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &\equiv z_1 + (-z_2) \\ &= (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2) \end{aligned}$$

性质:

$$|z_1 - z_2| \geq |z_1| - |z_2|.$$

1.2 复数的运算—积与商

z_1 与 z_2 的积定义为:

$$z_1 z_2 \equiv (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

性质:

交换律、结合律、分配律均成立.

$z_1 z_2$ 可理解为:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1 x_2 + ix_1 y_2 + iy_1 x_2 - y_1 y_2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1) \end{aligned}$$

1.2 复数的运算—积与商

z_1 和 z_2 的商定义为:

$$\frac{z_1}{z_2} \equiv \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.$$

性质:

乘法与除法互为逆运算.

1.2 复数的运算—积与商

z_1/z_2 可理解为:

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}.\end{aligned}$$

1.2 复数的运算—积与商

- 利用复数的指数式作乘法与除法很容易!

1.2 复数的运算—积与商

- 利用复数的指数式作乘法与除法很容易!
-

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$

1.2 复数的运算—积与商

- 利用复数的指数式作乘法与除法很容易!



$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} z_1 / z_2 &= \rho_1 e^{i\varphi_1} / (\rho_2 e^{i\varphi_2}) = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]. \end{aligned}$$

1.2 复数的运算—乘方

D'emoive 公式(棣莫弗)

$$\begin{array}{ccc}
 z = \rho e^{i\varphi} & & z = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \\
 \downarrow & & \downarrow \\
 z^n = \rho^n e^{in\varphi} & & z^n = \rho^n (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n. \\
 = \rho^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) & &
 \end{array}$$

*D'emoive*公式: $(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos n\varphi + i \sin n\varphi$.

1.2 复数的运算—乘方

导出三角函数的倍角公式. 由二项式定理:

$$\begin{aligned}
 (\cos \varphi + i \sin \varphi)^n &= \sum_{l=0}^n C_n^l (i \sin \varphi)^l (\cos \varphi)^{n-l} \\
 &= \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^l C_n^{2l} (\sin \varphi)^{2l} (\cos \varphi)^{n-2l} \\
 &\quad + i \sum_{l=0}^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor} (-1)^l C_n^{2l+1} (\sin \varphi)^{2l+1} (\cos \varphi)^{n-2l-1}
 \end{aligned}$$

1.2 复数的运算—乘方

其中,

$$C_n^l \equiv \binom{l}{n} = \frac{n!}{l!(n-l)!}$$

$$\left[\frac{n}{2} \right] = \begin{cases} \frac{n}{2}, & n \text{ is even,} \\ \frac{n-1}{2}, & n \text{ is odd.} \end{cases}$$

1.2 复数的运算—乘方

最后，得到三角函数的 n 倍角公式：

$$\cos n\varphi = \sum_{l=0}^{[\frac{n}{2}]} (-1)^l C_n^{2l} (\sin \varphi)^{2l} (\cos \varphi)^{n-2l},$$

$$\sin n\varphi = \sum_{l=0}^{[\frac{n-1}{2}]} (-1)^l C_n^{2l+1} (\sin \varphi)^{2l+1} (\cos \varphi)^{n-2l-1}.$$

1.2 复数的运算—开方

$z = \rho e^{i\varphi}$, 计算 $\sqrt[n]{z}$, n 为正整数.

- 设 $W = \sqrt[n]{z} = re^{i\theta}$, 则两边乘方, 有

$$z = \rho e^{i\varphi} = W^n = r^n e^{in\theta},$$

1.2 复数的运算—开方

$z = \rho e^{i\varphi}$, 计算 $\sqrt[n]{z}$, n 为正整数.

- 设 $W = \sqrt[n]{z} = re^{i\theta}$, 则两边乘方, 有

$$z = \rho e^{i\varphi} = W^n = r^n e^{in\theta},$$

- 所以 $\rho = r^n$, $\varphi + 2k\pi = n\theta$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

1.2 复数的运算—开方

$z = \rho e^{i\varphi}$, 计算 $\sqrt[n]{z}$, n 为正整数.

- 设 $W = \sqrt[n]{z} = re^{i\theta}$, 则两边乘方, 有

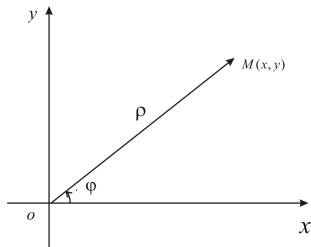
$$z = \rho e^{i\varphi} = W^n = r^n e^{in\theta},$$

- 所以 $\rho = r^n$, $\varphi + 2k\pi = n\theta$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$
- 所以 $r = \sqrt[n]{\rho} = \rho^{\frac{1}{n}}$, $\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.
 $\sqrt[n]{z}$ 有 n 个不同值, 多值函数.

1.3 复数的几何表示

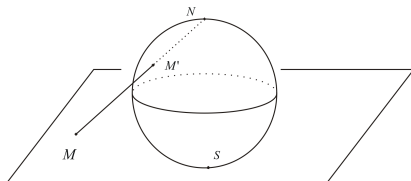
复平面上一个点 (x, y) 与一个复数 $z = x + iy$ 一一对应, 即

$$M(x, y) \leftrightarrow z = x + iy$$



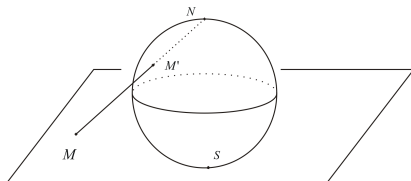
1.3 复数的几何表示

● 球极投影图示



1.3 复数的几何表示

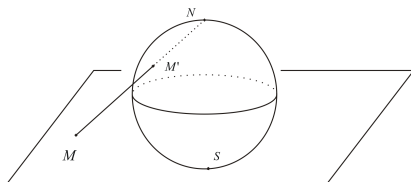
● 球极投影图示



● 因为 $M \leftrightarrow M'$,

1.3 复数的几何表示

● 球极投影图示



- 因为 $M \leftrightarrow M'$,
- 所以 $M' \leftrightarrow z = x + iy$, 其中 N 对应无穷远点.

2.1 复变函数的定义和连续性

复变函数的定义

$$W = f(z)$$

W 是复变数(宗量) z 的函数.

2.1 复变函数的定义和连续性

几个相关概念

- 区域: 由内点和边界点组成.

2.1 复变函数的定义和连续性

几个相关概念

- 区域: 由内点和边界点组成.
- 区域的连通性: 区域内任意两点可用一条曲线连起来, 曲线上的点都是区域的内点.

2.1 复变函数的定义和连续性

几个相关概念

- 区域: 由内点和边界点组成.
- 区域的连通性: 区域内任意两点可用一条曲线连起来, 曲线上的点都是区域的内点.
- 连通的种类 $\left\{ \begin{array}{l} \text{单连通} \\ \text{复连通} \end{array} \right.$

2.1 复变函数的定义和连续性

几个相关概念

- 区域: 由内点和边界点组成.
- 区域的连通性: 区域内任意两点可用一条曲线连起来, 曲线上的点都是区域的内点.
- 连通的种类 $\left\{ \begin{array}{l} \text{单连通} \\ \text{复连通} \end{array} \right.$
- 闭区域: 含边界上的点, 表示为 $\bar{B}$.

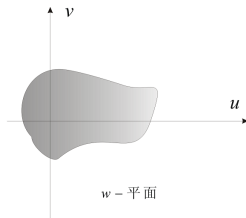
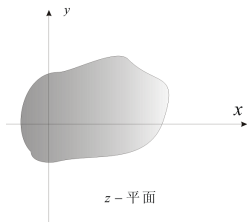
2.1 复变函数的定义和连续性

几个相关概念

- 区域: 由内点和边界点组成.
- 区域的连通性: 区域内任意两点可用一条曲线连起来, 曲线上的点都是区域的内点.
- 连通的种类 $\begin{cases} \text{单连通} \\ \text{复连通} \end{cases}$
- 闭区域: 含边界上的点, 表示为 $\bar{B}$.
- 开区域: 不含边界的点, 表示为 B .

2.1.1 复变函数的图示

$W = f(z) = u + iv$, $z = x + iy$; $u = \operatorname{Re} W$, $v = \operatorname{Im} W$.
将复变函数 W 分解成实部和虚部.



复变函数: 从 z 平面到 W 平面的映射.

2.1.2 连续性定义

连续性定义:

任意给定小量 $\varepsilon > 0$, 总可以找到 $\delta > 0$,
当 $|z - z_0| < \delta$ 时, $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$, 则称 $f(z)$ 在 z_0 点连续.

或:

当 $z \rightarrow z_0$ (任意方式), 有 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$,
则称 $f(z)$ 在 z_0 连续.

2.1.2 连续性定义

- 另外, $W = u(x, y) + iv(x, y)$, 其中 u, v 为二元实变函数.

2.1.2 连续性定义

- 另外, $W = u(x, y) + iv(x, y)$, 其中 u, v 为二元实变函数.
- 所以, W 的连续性 $\implies u, v$ 的连续性.

2.2 常见的初等复变函数

(1) 多项式

$$W = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, \quad n \in N,$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n \in C$, 系数为复常数, N 表示正整数.

2.2 常见的初等复变函数

(2) 有理分式

$$W = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}, \quad n, m \in N,$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n; b_0, b_1, \cdots, b_m \in C$, 系数为复常数.

2.2 常见的初等复变函数

(2) 有理分式

$$W = \frac{a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m}, \quad n, m \in N,$$

其中 $a_0, a_1, \cdots, a_n; b_0, b_1, \cdots, b_m \in C$, 系数为复常数.

- 奇点: 有理分式分母为零的点.

2.2 常见的初等复变函数

(3) 指数函数

$$W = e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

2.2 常见的初等复变函数

(3) 指数函数

$$W = e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

- 周期性: 周期为虚数 $2\pi i$.

2.2 常见的初等复变函数

(3) 指数函数

$$W = e^z = e^x(\cos y + i \sin y).$$

- 周期性: 周期为虚数 $2\pi i$.
- 多值性: $z + 2k\pi i, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, 对应于同一个 e^z . 因此, 其反函数必为多值的.

2.2 常见的初等复变函数

(4) 三角函数

$$\sin z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

2.2 常见的初等复变函数

(4) 三角函数

$$\sin z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

- 与实变三角函数的区别:

- ① z 不代表角度,

- ② $|\sin z| \leq 1, |\cos z| \leq 1$ 不存在.

2.2 常见的初等复变函数

(4) 三角函数

$$\sin z \equiv \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z \equiv \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

- 与实变三角函数的区别:
 - ① z 不代表角度,
 - ② $|\sin z| \leq 1, |\cos z| \leq 1$ 不存在.
- 实周期: 2π .

2.2 常见的初等复变函数

(5) 双曲函数

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

2.2 常见的初等复变函数

(5) 双曲函数

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

- 虚周期 $2\pi i$.

2.2 常见的初等复变函数

(5) 双曲函数

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$

- 虚周期 $2\pi i$.
- 三角函数与双曲函数的联系:

$$\begin{cases} \cos iz = \cosh z \\ \cosh iz = \cos z \end{cases}, \quad \begin{cases} \sin iz = i \sinh z \\ \sinh iz = i \sin z \end{cases}.$$

2.2 常见的初等复变函数

(6) 对数函数

$$W = \ln z \equiv \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i \arg z + i 2k\pi.$$

其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

¹其中第一个 $\ln 1$ 为实数域上的值 0, 第二个 $\ln 1$ 为复数域上的值 $2k\pi i$.

2.2 常见的初等复变函数

(6) 对数函数

$W = \ln z \equiv \ln |z| + i \operatorname{Arg} z = \ln |z| + i \arg z + i 2k\pi.$
 其中 $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

- 负数的对数有意义¹.

$$\ln(-1) = \ln 1 + i\pi + i2k\pi = i(2k + 1)\pi.$$

$$\ln 1 = i2k\pi.$$

¹其中第一个 $\ln 1$ 为实数域上的值0, 第二个 $\ln 1$ 为复数域上的值 $2k\pi i$.

2.2 常见的初等复变函数

(7) 非整数幂函数

$$W = z^s = e^{s \ln z},$$

其中 s 是非整数.

(8) 根式

$$W = \sqrt[n]{z}, \quad n \in N.$$

2.2 常见的初等复变函数

若 $z = \rho e^{i\varphi}$, 则 $W = \rho^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\varphi+2k\pi}{n}}$, $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$.

$$W = \sqrt[n]{z}$$

与

$$y = \sqrt[n]{x}$$

的比较:

↓
 { ①多值性
 ②负数能开
 偶数次方

↓
 { ①单值性
 ②负数的偶数
 次方不存在

2.2 常见的初等复变函数

(9) 反函数

例如, 反正弦函数:

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i} \ln[iz \pm \sqrt{-z^2 + 1}].$$

2.2 常见的初等复变函数

(9) 反函数

例如, 反正弦函数:

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i} \ln[iz \pm \sqrt{-z^2 + 1}].$$

- 因为 $W = \sin^{-1} z$, 即 $\sin W = z = \frac{e^{iW} - e^{-iW}}{2i}$,
所以 $e^{iW} - e^{-iW} = 2iz$.

2.2 常见的初等复变函数

(9) 反函数

例如, 反正弦函数:

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i} \ln[iz \pm \sqrt{-z^2 + 1}].$$

- 因为 $W = \sin^{-1} z$, 即 $\sin W = z = \frac{e^{iW} - e^{-iW}}{2i}$, 所以 $e^{iW} - e^{-iW} = 2iz$.
- 解出 W 即可, 它有两支.

2.2 常见的初等复变函数

(9) 反函数

例如, 反正弦函数:

$$\sin^{-1} z = \frac{1}{i} \ln[iz \pm \sqrt{-z^2 + 1}].$$

- 因为 $W = \sin^{-1} z$, 即 $\sin W = z = \frac{e^{iW} - e^{-iW}}{2i}$, 所以 $e^{iW} - e^{-iW} = 2iz$.
- 解出 W 即可, 它有两支.
- $\sin^{-1} z$ 是多值函数, 多值性由 $\sin z$ 的周期性所致!

3.1 为什么讲多值函数？

多值函数

复变函数的多值分支之间有关联, 不能简单作为相互独立的单值分支看待.

复变函数的导数

第二章、复变函数的导数

1.1 定义、求导规则和公式

- 单值函数 $W = f(z)$, 如果 Δz 以任意方式趋于零时, 极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

满足条件：①存在，②唯一，③有限，则称此极限为 $f(z)$ 在 z 点的导数，记作 $f'(z)$ ，或 $\frac{d}{dz}f(z)$ 。

1.1 定义、求导规则和公式

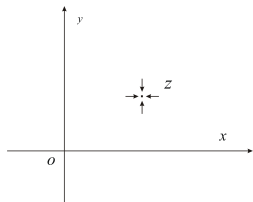
- 单值函数 $W = f(z)$, 如果 Δz 以任意方式趋于零时, 极限

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

满足条件：①存在，②唯一，③有限，则称此极限为 $f(z)$ 在 z 点的导数，记作 $f'(z)$ ，或 $\frac{d}{dz}f(z)$ 。

- 求导规则和公式与实变函数中类似。

1.2 *Cauchy – Riemann*条件



(实变函数无*Cauchy–Riemann*条件)

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

$$f(z + \Delta z) = u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y).$$

1.2 Cauchy – Riemann条件

第一步: 令 Δz 沿 x 轴趋于零, 即 $\Delta z = \Delta x \rightarrow 0$, 则

$$\Delta f = u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y).$$

所以,

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} + i \frac{v(x + \Delta x, y) - v(x, y)}{\Delta x} \right] \\ &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}$$

1.2 Cauchy – Riemann条件

第二步: 令 $\Delta z = i\Delta y$, 则

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

1.2 Cauchy – Riemann条件

第二步: 令 $\Delta z = i\Delta y$, 则

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{i\Delta y} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

- 要求导数存在, 则有

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = -i \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}$$

1.2 *Cauchy – Riemann*条件

● 即²

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases}$$

²此即*Cauchy – Riemann*条件!

1.2 *Cauchy – Riemann*条件-另一种形式

- 写出复数及其共轭：

$$z = x + iy, \quad z^* = x - iy.$$

1.2 Cauchy – Riemann条件-另一种形式

- 写出复数及其共轭：

$$z = x + iy, \quad z^* = x - iy.$$

- 则解出： $x = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad y = \frac{1}{2i}(z - z^*).$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z^*} &= \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*} \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \cdot \frac{1}{2} + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) \cdot \frac{i}{2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

1.2 *Cauchy – Riemann*条件-另一种形式

- 令 $\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0$, 则得 *Cauchy – Riemann* 条件.

1.2 *Cauchy – Riemann*条件-另一种形式

- 令 $\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0$, 则得 *Cauchy – Riemann* 条件.
- $\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0$ 的含义: $f(z)$ 可导的必要条件是 z 作为一个整体出现.

1.2 Cauchy – Riemann条件

例1: $W = \ln z$, 则

$$W' = \frac{1}{z}$$

在 $z_0 = 0$ 处不可求导! (虽然 $\ln z$ 是 z 的整体形式)

例2: $W_1 = z\operatorname{Re}z$, $W_2 = z\operatorname{Im}z$

只在 $z_0 = 0$ 处可导 (复变函数可导是一个很苛刻的条件).

1.2 Cauchy – Riemann 条件

例3: $W = \sqrt{\operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z} = \sqrt{xy}$, 在 $z = 0$ ($x = y = 0$) 处的导数.

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{z=0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left. \frac{\Delta u}{\Delta x} \right|_{z=0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left. \frac{\sqrt{\Delta x \cdot y}}{\Delta x} \right|_{\substack{x=0 \\ y=0}} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.\end{aligned}$$

1.2 *Cauchy – Riemann*条件

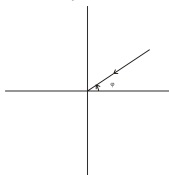
同理,

$$\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x}\bigg|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial y}\bigg|_{z=0} = 0.$$

所以满足*Cauchy – Riemann*条件.

1.2 Cauchy – Riemann 条件

但是, 沿轴角为 φ 的射线趋于零时,



即 $z = \rho e^{i\varphi}$, $\Delta z = e^{i\varphi} \Delta \rho$, 则

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta x \cdot \Delta y}}{\Delta z} = \lim_{\Delta \rho \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\Delta \rho \cos \varphi \cdot \Delta \rho \sin \varphi}}{e^{i\varphi} \Delta \rho} \\ &= \sqrt{\sin \varphi \cos \varphi} e^{-i\varphi} \neq 0. \end{aligned}$$

所以, 在 $z = 0$ 点, $W = \sqrt{xy}$ 不可导!

1.3 复变函数可导的充要条件

复变函数可导的充要条件

若 $W = u + iv$ 在 z 点的偏导数 $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial v}{\partial x}$, $\frac{\partial v}{\partial y}$ 存在、连续且满足 *Cauchy - Riemann* 条件, 则 W 在 z 点可导.

1.3 复变函数可导的充要条件

● 证明: u_x, u_y, v_x, v_y 存在、连续, 则

$$\begin{aligned}
 \Delta u &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) \\
 &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y + \Delta y) \\
 &\quad + u(x, y + \Delta y) - u(x, y) \\
 &= \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \Delta x + \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} \Delta y \\
 &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon_1 \right) \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon_2 \right) \Delta y \\
 &= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.
 \end{aligned}$$

1.3 复变函数可导的充要条件

- 证明: u_x, u_y, v_x, v_y 存在、连续, 则

$$\begin{aligned}\Delta u &= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) \\&= u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y + \Delta y) \\&\quad + u(x, y + \Delta y) - u(x, y) \\&= \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y + \Delta y)}{\Delta x} \Delta x + \frac{u(x, y + \Delta y) - u(x, y)}{\Delta y} \Delta y \\&= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \varepsilon_1 \right) \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \varepsilon_2 \right) \Delta y \\&= \frac{\partial u}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial u}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y.\end{aligned}$$

- 其中, 当 $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ 时, $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$.

1.3 复变函数可导的充要条件

● 另外, 可得

$$\begin{aligned}\Delta v &= v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) \\ &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y.\end{aligned}$$

1.3 复变函数可导的充要条件

- 另外, 可得

$$\begin{aligned}\Delta v &= v(x + \Delta x, y + \Delta y) - v(x, y) \\ &= \frac{\partial v}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial v}{\partial y} \Delta y + \varepsilon_3 \Delta x + \varepsilon_4 \Delta y.\end{aligned}$$

- 同样, 当 $\Delta x, \Delta y \rightarrow 0$ 时, $\varepsilon_3, \varepsilon_4 \rightarrow 0$.

1.3 复变函数可导的充要条件

● 所以,

$$\begin{aligned}\Delta f &= \Delta u + i\Delta v \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y} \right) i \Delta y \\ &\quad + O(\Delta x, \Delta y).\end{aligned}$$

1.3 复变函数可导的充要条件

- 利用 *Cauchy - Riemann* 条件,

$$\begin{aligned}\Delta f &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) i \Delta y + O(\Delta x, \Delta y) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta z + O(\Delta z).\end{aligned}$$

1.3 复变函数可导的充要条件

- 利用 *Cauchy - Riemann* 条件,

$$\begin{aligned}\Delta f &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) i \Delta y + O(\Delta x, \Delta y) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) \Delta z + O(\Delta z).\end{aligned}$$

- 所以, $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ 存在, 且与 $\Delta z \rightarrow 0$ 的方式无关.

1.4 奇点、孤立奇点

- 如果 $f(z)$ 在 z_0 不可导, 则 z_0 是 $f(z)$ 的奇点.

1.4 奇点、孤立奇点

- 如果 $f(z)$ 在 z_0 不可导, 则 z_0 是 $f(z)$ 的奇点.
- 若有 $\delta > 0$, 在 $|z - z_0| < \delta$ 内除 z_0 不可导外, 其它点均可导, 则称 z_0 为孤立奇点.

2.1 解析函数的定义

解析函数的定义

若 $f(z)$ 在复平面某一区域上处处可导, 则称此函数为在该区域上的解析函数.

2.1 解析函数的定义

解析函数的定义

若 $f(z)$ 在复平面某一区域上处处可导, 则称此函数为在该区域上的解析函数.

- 在某一点解析, 说明在这一点及其领域内可导.

2.2 解析函数的充要条件

解析函数的充要条件

若在某区域上, u_x, u_y, v_x, v_y 存在、连续, 且满足 *Cauchy - Riemann* 条件, 则复变函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在此区域上解析.

2.2 解析函数的充要条件

解析函数的充要条件

若在某区域上, u_x, u_y, v_x, v_y 存在、连续, 且满足 *Cauchy - Riemann* 条件, 则复变函数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在此区域上解析.

- 解析的充要条件比可导的充要条件要求高, 可导指在某点 z 满足上述条件, 而解析则是在 z 点及其领域满足上述要求.

2.3 解析函数的性质

(1) $W = u + iv$. u, v 是二维共轭调和函数.

调和函数^a的定义: 在某区域中连续且有连续的一、二阶偏导数的实函数 $u(x, y)$, 若满足二阶 $Laplace$ 方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

则称 $u(x, y)$ 为二阶调和函数.

^a此为实变函数中的概念.

2.3 解析函数的性质

- 对解析函数 $W = u + iv$, 利用 *Cauchy-Riemann* 条件,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

2.3 解析函数的性质

- 对解析函数 $W = u + iv$, 利用 *Cauchy-Riemann* 条件,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

- 得到:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},$$

2.3 解析函数的性质

● 因为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},$$

2.3 解析函数的性质

- 因为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},$$

- 所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

2.3 解析函数的性质

- 因为

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x},$$

- 所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

- 同理可证:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

2.3 解析函数的性质

(2) $u = c_1, v = c_2$ 两组曲线正交, 其中 c_1, c_2 为实常数.

2.3 解析函数的性质

(2) $u = c_1, v = c_2$ 两组曲线正交, 其中 c_1, c_2 为实常数.

● 证明: $u = c_1$ 的法线为,

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j}.$$

2.3 解析函数的性质

● $v = c_2$ 的法线为,

$$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j}.$$

³利用了C-R条件.

2.3 解析函数的性质

- $v = c_2$ 的法线为,

$$\nabla v = \frac{\partial v}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial v}{\partial y} \vec{j}.$$

- 它们的内积:³

$$\nabla u \cdot \nabla v = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

³利用了C-R条件.

2.3 解析函数的性质

- 理解 $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j}$ 是 $u(x, y) = c$ 的法线方向.

2.3 解析函数的性质

- 理解 $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j}$ 是 $u(x, y) = c$ 的法线方向.
- 若 $u(x, y) = c$, 则 $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0$, 即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} \right) \cdot (\vec{i} dx + \vec{j} dy) = 0.$$

2.3 解析函数的性质

- 理解 $\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j}$ 是 $u(x, y) = c$ 的法线方向.
- 若 $u(x, y) = c$, 则 $du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = 0$, 即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} \right) \cdot (\vec{i} dx + \vec{j} dy) = 0.$$

- 设 $ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ 为线元的长度, 则上式可写成:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} \right) \cdot \left(\vec{i} \frac{dx}{ds} + \vec{j} \frac{dy}{ds} \right) = 0.$$

2.3 解析函数的性质

- 因为

$$\vec{i} \frac{dx}{ds} + \vec{j} \frac{dy}{ds}$$

是单位切向量,

2.3 解析函数的性质

- 因为

$$\vec{i} \frac{dx}{ds} + \vec{j} \frac{dy}{ds}$$

是单位切向量,

- 所以

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j}$$

必定是法向量.

2.3 解析函数的性质

(3) u, v 相互确定. 已知 u (或 v), 可导出 v (或 u).

解析函数 $f(z) = u + iv$. 已知 u , 求 v .

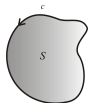
$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

则

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy.$$

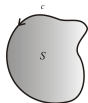
2.3 解析函数的性质

- 计算积分的方法:



2.3 解析函数的性质

● 计算积分的方法:



(i) 选特定路径(方便计算).

$$\oint_C -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \equiv \int \int_S \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dx dy = 0.$$

表明线积分与路径无关.^a

^a这里利用了格林公式.

2.3 解析函数的性质

(ii) 把 x 或 y 看成参数.

若把 y 看成参数, 则 $v = \int -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \phi(y)$; 再由 $\frac{\partial v}{\partial y}$ 定出 $\phi(y)$.

例: $u = e^x \sin y$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \cos y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y.$$

2.3 解析函数的性质

● 解：将 x 看成参数，有

$$\begin{aligned}v &= \int \frac{\partial v}{\partial x} dx + \int \frac{\partial v}{\partial y} dy \\&= \phi(x) + \int \frac{\partial v}{\partial y} dy \\&= \phi(x) + \int e^x \sin y dy \\&= \phi(x) - e^x \cos y.\end{aligned}$$

2.3 解析函数的性质

● 另外,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \cos y = \phi'(x) - e^x \cos y,$$

2.3 解析函数的性质

- 另外,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \cos y = \phi'(x) - e^x \cos y,$$

- 得到:

$$\phi'(x) = 0.$$

2.3 解析函数的性质

- 另外,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \cos y = \phi'(x) - e^x \cos y,$$

- 得到:

$$\phi'(x) = 0.$$

- 即,

$$\phi(x) = \text{const.}$$

2.3 解析函数的性质

● 所以,

$$\begin{aligned}f(z) &= u + iv \\&= e^x \sin y - ie^x \cos y + ic \\&= -ie^x(\cos y + i \sin y) + ic \\&= -ie^x e^{iy} + ic \\&= -ie^z + ic.\end{aligned}$$

2.3 解析函数的性质

(iii) 凑全微分法

例: $u = x^2 - y^2$

2.3 解析函数的性质

(iii) 凑全微分法

例: $u = x^2 - y^2$

● 利用 $C - R$ 条件, 有:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x.$$

2.3 解析函数的性质

● 则

$$\begin{aligned} v &= \int \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int 2y dx + 2x dy \\ &= \int d(2xy) = 2xy + c. \end{aligned}$$

2.3 解析函数的性质

● 则

$$\begin{aligned}v &= \int \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = \int 2y dx + 2x dy \\&= \int d(2xy) = 2xy + c.\end{aligned}$$

● 所以,

$$f(z) = u + iv = x^2 - y^2 + i2xy + ic = z^2 + ic.$$

2.4 解析函数在物理上的应用

(1) 平面静电场

设 u 为二维静电势, 则在无电荷区域, u 满足二维拉氏方程:

$$\nabla^2 u = 0.$$

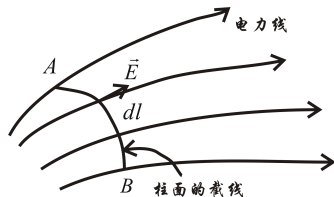
取 u 为 $f(z)$ 的实部, 找出虚部 v , 并构造解析函数^a

$$f(z) = u + iv.$$

^a $f(z)$ 被称为复势.

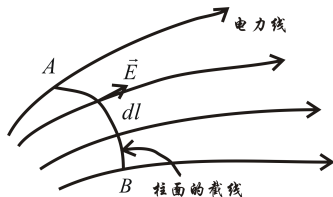
2.4 解析函数在物理上的应用

- 下面讨论 v 的物理意义



2.4 解析函数在物理上的应用

- 下面讨论 v 的物理意义



单位高柱面的电通量:

$$N = \int_A^B E_n dl,$$

其中 $E_n = \vec{E} \cdot \vec{n}$, $\vec{E} = -\nabla u$.

2.4 解析函数在物理上的应用

- 切向量 $\vec{t} = \{\frac{dx}{dl}, \frac{dy}{dl}\}$, 则法向量为 $\vec{n} = \{-\frac{dy}{dl}, \frac{dx}{dl}\}$.⁴

⁴因为要保证 $\vec{t} \cdot \vec{n} = 0$.

2.4 解析函数在物理上的应用

- 切向量 $\vec{t} = \{\frac{dx}{dl}, \frac{dy}{dl}\}$, 则法向量为 $\vec{n} = \{-\frac{dy}{dl}, \frac{dx}{dl}\}$.⁴
- 电场强度在法向的投影:

$$\begin{aligned}
 E_n &= \vec{E} \cdot \vec{n} = -\left(\frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j}\right) \cdot \left(-\frac{dy}{dl} \vec{i} + \frac{dx}{dl} \vec{j}\right) \\
 &= \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dy}{dl} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dx}{dl} = \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dl} + \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dl} \\
 &= \frac{dv}{dl}.
 \end{aligned}$$

⁴ 因为要保证 $\vec{t} \cdot \vec{n} = 0$.

2.4 解析函数在物理上的应用

● 所以

$$N = \int_A^B \frac{dv}{dl} \cdot dl = \int_A^B dv = v(B) - v(A),$$

即, v 是电通量函数.

2.4 解析函数在物理上的应用

● 所以

$$N = \int_A^B \frac{dv}{dl} \cdot dl = \int_A^B dv = v(B) - v(A),$$

即, v 是电通量函数.

● 结论: v 代表通过单位高柱面的电通量函数.

2.4 解析函数在物理上的应用

(2) 稳定的平面无旋、无源流体

连续性方程:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0,$$

其中, ρ 为密度, $\vec{v}$ 为速度.

2.4 解析函数在物理上的应用

(2) 稳定的平面无旋、无源流体

连续性方程:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0,$$

其中, ρ 为密度, $\vec{v}$ 为速度.

- 稳定流动 $\implies \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$; 不可压缩性 $\implies \rho = \text{常数}$.

2.4 解析函数在物理上的应用

- 所以, 连续性方程简化为

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

2.4 解析函数在物理上的应用

- 所以, 连续性方程简化为

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

- 又由于无旋性 $\implies \nabla \times \vec{v} = 0$. 因此, 引入速度势 u , 则有

$$\vec{v} = \nabla u.$$

而且, $\nabla \cdot \vec{v} = 0 \implies \nabla^2 u = 0$.

2.4 解析函数在物理上的应用

- 所以, 连续性方程简化为

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

- 又由于无旋性 $\implies \nabla \times \vec{v} = 0$. 因此, 引入速度势 u , 则有

$$\vec{v} = \nabla u.$$

而且, $\nabla \cdot \vec{v} = 0 \implies \nabla^2 u = 0$.

- 引入复势 $f(z) = u + iv$, 则可证明 v 是流量函数.

2.4 解析函数在物理上的应用

(3) 稳定的平面温度场

同上可证, 若 $u(x, y)$ 是温度函数, 则 $v(x, y)$ 是热流量函数.

⁵这里未明确给出虚部.

2.4 解析函数在物理上的应用

(3) 稳定的平面温度场

同上可证, 若 $u(x, y)$ 是温度函数, 则 $v(x, y)$ 是热流量函数.

书(第四版, 下同) $p.18$, 例2.

已知 $f(z)$ 的虚部, 求实部.

⁵这里未明确给出虚部.

2.4 解析函数在物理上的应用

(3) 稳定的平面温度场

同上可证, 若 $u(x, y)$ 是温度函数, 则 $v(x, y)$ 是热流量函数.

书(第四版, 下同) $p.18$, 例2.

已知 $f(z)$ 的虚部, 求实部.

● 电场线方程: $y^2 = c^2 + 2cx, c > 0$.⁵

⁵这里未明确给出虚部.

2.4 解析函数在物理上的应用

- 解出 c ,

$$c = -x \pm \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2.4 解析函数在物理上的应用

- 解出 c ,

$$c = -x \pm \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- 因为 $c > 0$, 所以

$$c = -x + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2.4 解析函数在物理上的应用

- 解出 c ,

$$c = -x \pm \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- 因为 $c > 0$, 所以

$$c = -x + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

- 但是, 不能认为 $v(x, y) = -x + \sqrt{x^2 + y^2}$, 因为它不是调和函数.

2.4 解析函数在物理上的应用

下面证明 $v(x, y)$ 不满足 $Laplace$ 方程, 即

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \neq 0.$$

● 利用

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

2.4 解析函数在物理上的应用

下面证明 $v(x, y)$ 不满足 $Laplace$ 方程, 即

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \neq 0.$$

- 利用

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

- 得到:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

2.4 解析函数在物理上的应用

● 同理可得：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

2.4 解析函数在物理上的应用

- 同理可得：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

- 因此，

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0.$$

2.4 解析函数在物理上的应用

- 同理可得：

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

- 因此,

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \neq 0.$$

- 所以,

$$v(x, y) \neq -x + \sqrt{x^2 + y^2}.$$

2.4 解析函数在物理上的应用

- 设 $v = F(t)$, $t = -x + \sqrt{x^2 + y^2}$.

2.4 解析函数在物理上的应用

- 设 $v = F(t)$, $t = -x + \sqrt{x^2 + y^2}$.
- 下面由 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ 来确定 $F(t)$.

2.4 解析函数在物理上的应用

- 设 $v = F(t)$, $t = -x + \sqrt{x^2 + y^2}$.
- 下面由 $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$ 来确定 $F(t)$.
- 容易证明:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = F''(t) \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 1 \right)^2 + F'(t) \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = F''(t) \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right)^2 + F'(t) \frac{x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

2.4 解析函数在物理上的应用

- 代入拉氏方程并化简得:

$$\frac{F''(t)}{F'(t)} = -\frac{1}{2t}.$$

2.4 解析函数在物理上的应用

- 代入拉氏方程并化简得:

$$\frac{F''(t)}{F'(t)} = -\frac{1}{2t}.$$

- 积分一次

$$\ln F'(t) = -\frac{1}{2} \ln t + \ln c = \ln \frac{c}{\sqrt{t}}.$$

即

$$F'(t) = \frac{c}{\sqrt{t}}.$$

2.4 解析函数在物理上的应用

- 再积分一次, 得

$$F(t) = c_1 \sqrt{t} + c_2.$$

2.4 解析函数在物理上的应用

- 再积分一次, 得

$$F(t) = c_1 \sqrt{t} + c_2.$$

- 所以

$$v \equiv F(t) = c_1 \sqrt{t} + c_2 = c_1 \sqrt{-x + \sqrt{x^2 + y^2}} + c_2.$$

2.4 解析函数在物理上的应用

- 再利用书 $p.15$ 例2的结果, 得实部为

$$u = c_1 \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + c_3.$$

2.4 解析函数在物理上的应用

- 再利用书 $p.15$ 例2的结果, 得实部为

$$u = c_1 \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + c_3.$$

- 所以, 等势线方程为:

$$c_1 \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + c_3 = \text{const.}$$

2.4 解析函数在物理上的应用

- 再利用书 $p.15$ 例2的结果, 得实部为

$$u = c_1 \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + c_3.$$

- 所以, 等势线方程为:

$$c_1 \sqrt{x + \sqrt{x^2 + y^2}} + c_3 = \text{const.}$$

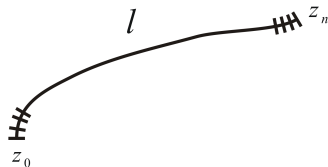
- 化简为

$$y^2 = c^2 - 2cx, \quad c > 0.$$

复变函数的积分

第三章、复变函数的积分

1.1 复变函数积分的定义



z 平面上有一条曲线 l , 它满足: ①分段光滑, ②定义了一个连续函数 $f(z)$. 将 l 分成 n 段, 分点为 $z_0, z_1, \dots, z_n$, 在 $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$ 之间取一点 ξ_k .

1.1 复变函数积分的定义

复变函数积分的定义

如果极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty, |\Delta z_k| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(z_k - z_{k-1})$$

存在, 则称为 $f(z)$ 沿 l 的路径积分. 记作 $\int_l f(z)dz$.

1.2 复变函数积分的性质

由定义得

$$\begin{aligned}\int_l f(z)dz &= \int_l (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_l (udx - vdy) + i \int_l (udy + vdx).\end{aligned}$$

1.2 复变函数积分的性质

由定义得

$$\begin{aligned}\int_l f(z)dz &= \int_l (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_l (udx - vdy) + i \int_l (udy + vdx).\end{aligned}$$

- 等价于两个实变函数的线积分.

1.2 复变函数积分的性质

由定义得

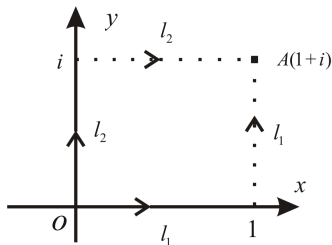
$$\begin{aligned}\int_l f(z)dz &= \int_l (u + iv)(dx + idy) \\ &= \int_l (udx - vdy) + i \int_l (udy + vdx).\end{aligned}$$

- 等价于两个实变函数的线积分.
- 实变函数线积分的性质均适用于复变函数的情形.

1.2 复变函数积分的性质

例1 书p.24例题. 计算

$$I_1 = \int_{l_1} \operatorname{Re} z dz, \quad I_2 = \int_{l_2} \operatorname{Re} z dz.$$



1.2 复变函数积分的性质

● 解:

$$I_1 = \int_{l_1} x(dx+idy) = \int_0^1 xdx + i \int_0^1 1 \cdot dy = \frac{1}{2} + i.$$

$$I_2 = \int_{l_2} x(dx+idy) = \int_0^1 0 \cdot idy + \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$

⁶原因是被积函数 $\operatorname{Re} z$ 不是解析函数.

1.2 复变函数积分的性质

● 解:

$$I_1 = \int_{l_1} x(dx+idy) = \int_0^1 xdx + i \int_0^1 1 \cdot dy = \frac{1}{2} + i.$$

$$I_2 = \int_{l_2} x(dx+idy) = \int_0^1 0 \cdot idy + \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}.$$

● 所以, $I_1 \neq I_2$, 积分与路径相关.⁶

⁶原因是被积函数 $\operatorname{Re} z$ 不是解析函数.

1.2 复变函数积分的性质

例2: $f(z)$ 是单连通区域 $\bar{B}$ 上的解析函数, 则可证明 $\int_l f(z)dz$ 与积分路径无关.

1.2 复变函数积分的性质

例2: $f(z)$ 是单连通区域 $\bar{B}$ 上的解析函数, 则可证明 $\int_l f(z)dz$ 与积分路径无关.

● 证明:

$$\begin{aligned}
 \oint_c f(z)dz &= \oint_c (udx - vdy) + i \oint_c (udy + vdx) \\
 &= \iint_s \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \iint_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

1.2 复变函数积分的性质

例2: $f(z)$ 是单连通区域 $\bar{B}$ 上的解析函数, 则可证明 $\int_l f(z)dz$ 与积分路径无关.

● 证明:

$$\begin{aligned}\oint_c f(z)dz &= \oint_c (udx - vdy) + i \oint_c (udy + vdx) \\ &= \iint_s \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dxdy + i \iint_s \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) dxdy \\ &= 0.\end{aligned}$$

● 所以, $\int_l f(z)dz$ 与路径无关.

2.1 单连通区域的*Cauchy*定理

单连通区域的*Cauchy*定理^a

^aA.L.*Cauchy*, 19世纪法国数学家.

如果 $f(z)$ 在单连通区域 $\bar{B}$ 中解析, 则沿 $\bar{B}$ 内任何一条分段光滑的闭合回路的积分为零.

2.1 单连通区域的*Cauchy*定理

- 因为

$$\oint_l f(z)dz = 0,$$

2.1 单连通区域的Cauchy定理

- 因为

$$\oint_l f(z)dz = 0,$$

- 所以

$$\int_{l_1} f(z)dz = \int_{l_2} f(z)dz.$$

2.1 单连通区域的Cauchy定理

- 因为

$$\oint_l f(z)dz = 0,$$

- 所以

$$\int_{l_1} f(z)dz = \int_{l_2} f(z)dz.$$

- 定义

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(z)dz.$$

2.1 单连通区域的*Cauchy*定理

$F(z)$ 的性质:

①单值函数,^a ②解析函数, 且 $F'(z) = f(z)$.

^a由定义知, $F(z)$ 与路径无关

2.1 单连通区域的Cauchy定理

$F(z)$ 的性质:

①单值函数,^a ②解析函数, 且 $F'(z) = f(z)$.

^a由定义知, $F(z)$ 与路径无关

● 下面证明

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta z} = f(z).$$

2.1 单连通区域的Cauchy定理

● 由于

$$\begin{aligned}\frac{\Delta F}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z} \left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi - \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \right] \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi,\end{aligned}$$

2.1 单连通区域的*Cauchy*定理

● 由于

$$\begin{aligned}\frac{\Delta F}{\Delta z} &= \frac{1}{\Delta z} \left[\int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi - \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \right] \\ &= \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi,\end{aligned}$$

● 考虑到:

$$f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} f(z) d\xi,$$

2.1 单连通区域的Cauchy定理

- 分析两者之差的模:

$$\begin{aligned}\left| \frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(\xi) - f(z)] d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |f(\xi) - f(z)| \cdot |d\xi|.\end{aligned}$$

2.1 单连通区域的Cauchy定理

- 分析两者之差的模:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z) \right| &= \left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} [f(\xi) - f(z)] d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |f(\xi) - f(z)| \cdot |d\xi|. \end{aligned}$$

- 因为 $f(z)$ 在 $\bar{B}$ 中连续, 所以任意给定 $\varepsilon > 0$, 总可以找到 $\delta > 0$. 当 $|\Delta z| < \delta$ 时, $|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon$.

2.1 单连通区域的Cauchy定理

● 所以,

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |d\xi| = \varepsilon.$$

即

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta z} = f(z), \text{ or } F'(z) = f(z).$$

2.1 单连通区域的Cauchy定理

- 所以,

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |d\xi| = \varepsilon.$$

即

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta z} = f(z), \text{ or } F'(z) = f(z).$$

- 推论: 如果 $\Phi'(z) = f(z)$, 则 $\Phi(z) = F(z) + c$, c 为任意复常数.

2.1 单连通区域的Cauchy定理

- 所以,

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta z} - f(z) \right| < \frac{\varepsilon}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |d\xi| = \varepsilon.$$

即

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta z} = f(z), \text{ or } F'(z) = f(z).$$

- 推论: 如果 $\Phi'(z) = f(z)$, 则 $\Phi(z) = F(z) + c$, c 为任意复常数.
- 称 $\Phi(z)$ 为 $f(z)$ 的不定积分.

2.2 复连通区域的Cauchy定理

复连通区域的Cauchy定理

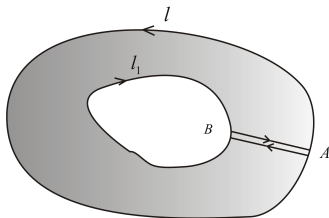
若 $f(z)$ 在复连通区域 $\bar{B}$ 中单值解析, 则

$$\oint_l f(z)dz = \sum_{i=1}^n \oint_{l_i} f(z)dz,$$

其中, l 为 $\bar{B}$ 的外边界线, l_i 为 $\bar{B}$ 的内边线; 积分方向同为顺时针或反时针.

证明: 以下证明以 $i = 1$ 为例.

2.2 复连通区域的*Cauchy*定理



- 由单连通区域的*Cauchy*定理,

$$\oint_l f(z)dz + \int_A^B f(z)dz + \oint_{l_1} f(z)dz + \int_B^A f(z)dz = 0.$$

2.2 复连通区域的*Cauchy*定理

- 因为 $f(z)$ 是单值解析的, 即

$$\int_A^B f(z)dz + \int_B^A f(z)dz = 0,$$

2.2 复连通区域的*Cauchy*定理

- 因为 $f(z)$ 是单值解析的, 即

$$\int_A^B f(z)dz + \int_B^A f(z)dz = 0,$$

- 所以

$$\oint_l f(z)dz = \oint_{l_1} f(z)dz$$

2.2 复连通区域的*Cauchy*定理

例： 计算 $\oint_l \frac{dz}{z-\alpha}$.

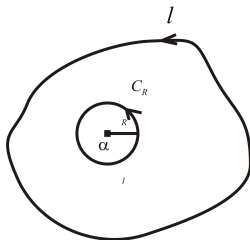
(i) l 包围 α ; (ii) l 不包围 α .

2.2 复连通区域的Cauchy定理

例：计算 $\oint_l \frac{dz}{z-\alpha}$.

(i) l 包围 α ; (ii) l 不包围 α .

● 解: (i)以 α 为圆心, R 为半径作圆 C_R ,



使 C_R 保持在 l 内部.

2.2 复连通区域的Cauchy定理

- 由复连通区域的Cauchy定理:⁷

$$\oint_l \frac{dz}{z - \alpha} = \oint_{C_R} \frac{dz}{z - \alpha} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\psi} d\psi}{Re^{i\psi}} = 2\pi i.$$

⁷因为 $z - \alpha = Re^{i\psi}$, 所以 $dz = iRe^{i\psi} d\psi$.

⁸这里 l 包围 α .

2.2 复连通区域的Cauchy定理

- 由复连通区域的Cauchy定理:⁷

$$\oint_l \frac{dz}{z - \alpha} = \oint_{C_R} \frac{dz}{z - \alpha} = \int_0^{2\pi} \frac{iRe^{i\psi} d\psi}{Re^{i\psi}} = 2\pi i.$$

- 即⁸

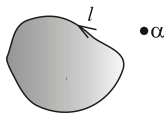
$$\frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{dz}{z - \alpha} = 1.$$

⁷因为 $z - \alpha = Re^{i\psi}$, 所以 $dz = iRe^{i\psi} d\psi$.

⁸这里 l 包围 α .

2.2 复连通区域的*Cauchy*定理

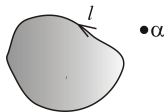
- (ii) l 不包围 α . 显然,



$$\oint_l \frac{dz}{z - \alpha} = 0.$$

2.2 复连通区域的*Cauchy*定理

● (ii) l 不包围 α . 显然,

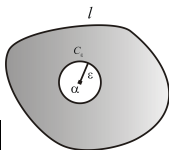


$$\oint_l \frac{dz}{z - \alpha} = 0.$$

性质

在复连通区域, 一般情况下 $\int_{z_0}^z f(z) dz$ 是多值的.

3.1 Cauchy积分公式的形式



若 $f(z)$ 在以 l 为边界的区域 $\bar{B}$ 上解析, 则

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{z - \alpha} dz,$$

其中, α 为区域内任意一点.

公式的意义:

将解析函数的边界与内点联系起来. 内点的值(公式左端)由边界积分决定!

3.1 Cauchy积分公式的形式

● 证明:⁹

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{z - \alpha} dz - f(\alpha) \\
 = & \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} dz \\
 = & \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} dz
 \end{aligned}$$

⁹第一个等号利用了上例的结果；第二个等号利用了复连通区域的Cauchy定理.

3.1 *Cauchy*积分公式的形式

- 分析上式的模,

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\varepsilon} \frac{f(z) - f(\alpha)}{z - \alpha} dz \right| \\ & \leq \frac{1}{2\pi} \text{Max} |f(z) - f(\alpha)| \cdot \oint_{C_\varepsilon} \frac{|dz|}{|z - \alpha|} \\ & = \text{Max} |f(z) - f(\alpha)|. \end{aligned}$$

3.1 *Cauchy*积分公式的形式

- 当 $z \rightarrow \alpha$, 即 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\text{Max}|f(z) - f(\alpha)| \rightarrow 0$, 而且该极大值的极限与 ε 没有关系.

3.1 *Cauchy*积分公式的形式

- 当 $z \rightarrow \alpha$, 即 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\text{Max}|f(z) - f(\alpha)| \rightarrow 0$, 而且该极大值的极限与 ε 没有关系.
- 所以,

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{z - \alpha} dz,$$

其中 l 为区域的所有边界, 且沿正方向.

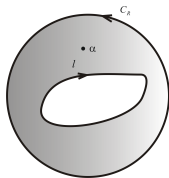
3.1 *Cauchy*积分公式的形式

- 无界区域的*Cauchy*积分公式(证明见书*p.30*)

3.1 *Cauchy*积分公式的形式

- 无界区域的*Cauchy*积分公式(证明见书p.30)
- 如果 $f(z)$ 在简单闭合回路 l 上单值解析, 且当 $z \rightarrow \infty$ 时, $f(z)$ 一致趋于零, 则

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(z)}{z - \alpha} dz,$$



其中 α 为 l 外的任意一点.

3.1 *Cauchy*积分公式的形式

- 若以 z 代 α , ξ 代 z , 则*Cauchy*积分公式为

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

3.1 *Cauchy*积分公式的形式

- 若以 z 代 α , ξ 代 z , 则*Cauchy*积分公式为

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

- 物理上的意义: (由解析函数 $f(z)$ 表示的)平面场的边界条件决定区域内部的场.

3.2 *Cauchy*积分公式的推论

(1) 解析函数有任意阶导数

3.2 *Cauchy*积分公式的推论

(1) 解析函数有任意阶导数

- 证明: 由*Cauchy*积分公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

上式亦称为解析函数的积分表达式. 由于 ξ 在边界 l 上取值, z 是内点, 因此 $\xi - z \neq 0$. 即, $\frac{f(\xi)}{\xi - z}$ 是 z 的连续函数, 所以可在积分号下求导数.

3.2 *Cauchy*积分公式的推论

● 计算各阶导数：

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi,$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

3.2 Cauchy积分公式的推论

- 计算各阶导数:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi,$$

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi.$$

- 利用解析函数存在任意阶导数, 可以证明: 调和函数任意阶偏导数仍是调和函数(作为思考题).

3.2 *Cauchy*积分公式的推论

(2) 最大模定理

设 $f(z)$ 在区域 $\bar{B}$ 上解析, 则 $|f(z)|$ 只能在边界上取极大值.

3.2 *Cauchy*积分公式的推论

(2) 最大模定理

设 $f(z)$ 在区域 $\bar{B}$ 上解析, 则 $|f(z)|$ 只能在边界上取极大值.

- 证明: $f(z)$ 在 $\bar{B}$ 上解析, 则 $[f(z)]^n$ 在 $\bar{B}$ 上也解析, 因此, 利用*Cauchy*公式可以得到,

$$[f(z)]^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{[f(\xi)]^n}{\xi - z} d\xi.$$

3.2 *Cauchy* 积分公式的推论

$|f(\xi)|$ 在 l 上必有极大值, 记为 M . $|\xi - z|$ 的极小值为 δ , 则

$$\begin{aligned}
 |f(z)|^n &= \frac{1}{2\pi} \left| \oint_l \frac{[f(\xi)]^n}{\xi - z} d\xi \right| \\
 &\leq \frac{1}{2\pi} \oint_l \frac{|f(\xi)|^n}{|\xi - z|} |d\xi| \\
 &\leq \frac{M^n}{\delta} \frac{L}{2\pi}
 \end{aligned}$$

其中 $L = \oint_l |d\xi|$.

3.2 *Cauchy*积分公式的推论

- 两边开 n 次方, 得

$$|f(z)| \leq M \left(\frac{L}{2\pi\delta} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

3.2 Cauchy积分公式的推论

- 两边开 n 次方, 得

$$|f(z)| \leq M \left(\frac{L}{2\pi\delta} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

- 由于 $|f(z)|$ 的大小与 n 无关, 因此当 $n \rightarrow \infty$ 时的 $|f(z)|$ 的值就是 $|f(z)|$ 本身的值.

3.2 Cauchy积分公式的推论

- 两边开 n 次方, 得

$$|f(z)| \leq M \left(\frac{L}{2\pi\delta} \right)^{\frac{1}{n}}.$$

- 由于 $|f(z)|$ 的大小与 n 无关, 因此当 $n \rightarrow \infty$ 时的 $|f(z)|$ 的值就是 $|f(z)|$ 本身的值.
- 所以, $n \rightarrow \infty$ 时, $|f(z)| \leq M$.

3.2 *Cauchy*积分公式的推论

(3) *Livouville*定理

若 $f(z)$ 在全平面解析, 而且当 $z \rightarrow \infty$ 时, $|f(z)|$ 有界, 则 $f(z)$ 必为常数.^a

^a此处“全平面”不含 ∞ 点.

3.2 Cauchy积分公式的推论

(3) *Livouville*定理

若 $f(z)$ 在全平面解析, 而且当 $z \rightarrow \infty$ 时, $|f(z)|$ 有界, 则 $f(z)$ 必为常数.^a

^a此处“全平面”不含 ∞ 点.

● 证明:

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\xi,$$

其中 l 为以 z 为圆心, R 为半径的圆.

3.2 *Cauchy*积分公式的推论

- 因为 $f(z)$ 有界, 即 $|f(\xi)| \leq N$.

3.2 Cauchy积分公式的推论

- 因为 $f(z)$ 有界, 即 $|f(\xi)| \leq N$.
- 所以,

$$|f'(z)| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot N \cdot \frac{1}{R^2} 2\pi R = \frac{N}{R}.$$

当 $R \rightarrow \infty$ 时, $|f'(z)| \leq \frac{N}{R} \rightarrow 0$, 所以 $f'(z) = 0$. 即

$$f(z) = c,$$

其中 c 为复常数.

3.2 *Cauchy*积分公式的推论

- z^n (n 为正整数), e^z , $\sin z$, $\cos z$, $\sinh z$, $\cosh z$ 在全平面解析, 但它们并不是常数, 原因是它们是无界的.

3.2 Cauchy积分公式的推论

例：Cauchy积分公式应用举例(书p.31第2题).

解：

$$\Psi(t, x) = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}},$$

其中, x 为参数, t 为复变数. 这是拉盖尔多项式的母函数, 见书p.411 附录十一.

3.2 Cauchy积分公式的推论

例：Cauchy积分公式应用举例(书p.31第2题).

解：

$$\Psi(t, x) = \frac{1}{1-t} e^{-\frac{xt}{1-t}},$$

其中, x 为参数, t 为复变数. 这是拉盖尔多项式的母函数, 见书p.411 附录十一.

● 由Cauchy积分公式得:

$$\frac{\partial^n \Psi}{\partial t^n} = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{\Psi(\xi, x)}{(\xi - t)^{n+1}} d\xi.$$

3.2 Cauchy积分公式的推论

● 因此,

$$\left. \frac{\partial^n \Psi}{\partial t^n} \right|_{t=0} = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{\Psi(\xi, x)}{\xi^{n+1}} d\xi = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^{-\frac{x\xi}{1-\xi}}}{(1-\xi)\xi^{n+1}} d\xi.$$

3.2 Cauchy积分公式的推论

- 因此,

$$\left. \frac{\partial^n \Psi}{\partial t^n} \right|_{t=0} = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{\Psi(\xi, x)}{\xi^{n+1}} d\xi = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^{-\frac{x\xi}{1-\xi}}}{(1-\xi)\xi^{n+1}} d\xi.$$

- 设积分变数变换为: $\xi = (z-x)/z = 1 - x/z$, 则

$$1 - \xi = \frac{x}{z}, \quad d\xi = \frac{x}{z^2} dz.$$

3.2 *Cauchy* 积分公式的推论

● 所以,¹⁰

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial^n \Psi}{\partial t^n} \right|_{t=0} &= \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{e^{-x \cdot \frac{z-x}{z}}}{\frac{x}{z} \cdot (1 - \frac{x}{z})^{n+1}} \cdot \frac{x}{z^2} dz \\
 &= \frac{n!}{2\pi i} \oint e^x \frac{z^n e^{-z}}{(z-x)^{n+1}} dz \\
 &= e^x \cdot \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{z^n e^{-z}}{(z-x)^{n+1}} dz \\
 &= e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).
 \end{aligned}$$

¹⁰ 第三式利用 e^x 与 z 的积分无关；第四个式反用 *Cauchy* 积分公式。

复数级数

第四章、复数级数

复数级数的一般概念

- 级数是函数的一种重要表达方式;¹¹

¹¹扩展初等函数, 如 $\sin z, \cos z, e^z, \ln z, \dots$, 的表达式.

复数级数的一般概念

- 级数是函数的一种重要表达方式;¹¹
- 微分方程的级数解法;

¹¹扩展初等函数, 如 $\sin z, \cos z, e^z, \ln z, \dots$, 的表达式. 

复数级数的一般概念

- 级数是函数的一种重要表达方式;¹¹
- 微分方程的级数解法;
- 做近似计算等.

¹¹扩展初等函数, 如 $\sin z, \cos z, e^z, \ln z, \dots$, 的表达式.

1.1 数项级数

数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k = w_1 + w_2 + \cdots + w_k + \cdots,$$

其中, w_k 为复常数, $k = 1, 2, \cdots$.

1.1 数项级数

数项级数

$$\sum_{k=1}^{\infty} w_k = w_1 + w_2 + \cdots + w_k + \cdots,$$

其中, w_k 为复常数, $k = 1, 2, \cdots$.

- 收敛的意义: 令 $S_n = \sum_{k=1}^n w_k$, 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 存在, 唯一, 则称 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 收敛.

1.1 数项级数

- 若 $w_k = u_k + iv_k$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k + i \sum_{k=1}^{\infty} v_k$.
复数级数的收敛性问题可以转化为两个实数级数的收敛性问题.

1.1 数项级数

- 若 $w_k = u_k + iv_k$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = \sum_{k=1}^{\infty} u_k + i \sum_{k=1}^{\infty} v_k$.
 复数级数的收敛性问题可以转化为两个实数级数的收敛性问题.

*Cauchy*判据(收敛的充要条件):

任意给定 $\varepsilon > 0$, 总可以找到 N , 当 $n > N$ 时,
 $\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} w_k \right| < \varepsilon$, 则此级数收敛.^a

^a p 为任意正整数.

1.1 数项级数

收敛级数的性质:

1.1 数项级数

收敛级数的性质:

- 若 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = s$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha w_k = \alpha s$. α 为复常数.

1.1 数项级数

收敛级数的性质:

- 若 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = s$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha w_k = \alpha s$. α 为复常数.
- 若 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = s$, $\sum_{k=1}^{\infty} F_k = \sigma$,
则 $\sum_{k=1}^{\infty} (w_k \pm F_k) = s \pm \sigma$.

1.1 数项级数

收敛级数的性质:

- 若 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = s$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha w_k = \alpha s$. α 为复常数.
- 若 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = s$, $\sum_{k=1}^{\infty} F_k = \sigma$,
则 $\sum_{k=1}^{\infty} (w_k \pm F_k) = s \pm \sigma$.
- 级数前加减有限项不影响收敛性.

1.1 数项级数

收敛级数的性质:

- 若 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = s$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha w_k = \alpha s$. α 为复常数.
- 若 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = s$, $\sum_{k=1}^{\infty} F_k = \sigma$,
则 $\sum_{k=1}^{\infty} (w_k \pm F_k) = s \pm \sigma$.
- 级数前加减有限项不影响收敛性.
- 若 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = s$, 则当 $k \rightarrow \infty$ 时, $w_k \rightarrow 0$.

1.1 数项级数

收敛级数的性质:

- 若 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = s$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha w_k = \alpha s$. α 为复常数.
- 若 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = s$, $\sum_{k=1}^{\infty} F_k = \sigma$,
则 $\sum_{k=1}^{\infty} (w_k \pm F_k) = s \pm \sigma$.
- 级数前加减有限项不影响收敛性.
- 若 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k = s$, 则当 $k \rightarrow \infty$ 时, $w_k \rightarrow 0$.

绝对收敛:

如果 $\sum_{k=1}^{\infty} |w_k|$ 收敛, 则称 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k$ 绝对收敛.

1.2 函数项级数

- 函数项级数表示为 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$.

1.2 函数项级数

- 函数项级数表示为 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$.
- 如果 $w_k(z)$ 定义在区域 B 上(或曲线 l 上), $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$ 在区域上每一点都收敛, 则称它在区域上收敛.
可表述为:

1.2 函数项级数

- 函数项级数表示为 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$.
- 如果 $w_k(z)$ 定义在区域 B 上(或曲线 l 上), $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$ 在区域上每一点都收敛, 则称它在区域上收敛. 可表述为:

任意给定 $\varepsilon > 0$, 一定有 $N(z)$ 存在, 当 $n > N(z)$ 时, 有 $|\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k(z)| < \varepsilon$.

1.2 函数项级数

- 函数项级数表示为 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$.
- 如果 $w_k(z)$ 定义在区域 B 上(或曲线 l 上), $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$ 在区域上每一点都收敛, 则称它在区域上收敛. 可表述为:

任意给定 $\varepsilon > 0$, 一定有 $N(z)$ 存在, 当 $n > N(z)$ 时, 有 $|\sum_{k=n+1}^{n+p} w_k(z)| < \varepsilon$.

- 如果 N 与 z 无关, 则称 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$ 在区域上一致收敛或均匀收敛.

1.2 函数项级数

一致收敛级数的性质:

- (1) 若 $w_k(z)$ 在 B 上连续, 则 $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$ 也在 B 上连续.
- (2) 若 $w_k(z)$ 在 l 上连续, 则 $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$ 也在 l 上连续, 可沿 l 逐项来积分, 且求和与积分可交换顺序.

1.2 函数项级数

级数一致收敛判别法:

如果对于区域 B 上各点, 级数 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$ 中的各项的模 $|w_k(z)| \leq m_k$, 而正的数项级数 $\sum_{k=1}^{\infty} m_k$ 收敛, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} w_k(z)$ 在 B 上一致且绝对收敛.

2.1 正幂级数

正幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k = a_0 + a_1 (z - z_0) + a_2 (z - z_0)^2 \\ + \cdots + a_m (z - z_0)^m + \cdots .$$

以 z_0 为中心的幂级数.

2.1 正幂级数

正幂级数的 *d'Alembert* 判别法:

如果 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}(z-z_0)^{k+1}|}{|a_k(z-z_0)^k|} < 1,$

即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| \cdot |z - z_0| < 1,$

或者表示成 $|z - z_0| < \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|,$

则 $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(z - z_0)^k|$ 收敛.

2.1 正幂级数

定义收敛半径为:

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|.$$

2.1 正幂级数

定义收敛半径为:

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|.$$

- 当 $|z - z_0| < R$ 时, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(z - z_0)^k|$ 收敛,
即 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ 绝对收敛.

2.1 正幂级数

定义收敛半径为:

$$R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|.$$

- 当 $|z - z_0| < R$ 时, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k(z - z_0)^k|$ 收敛, 即 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ 绝对收敛.
- 当 $|z - z_0| > R$ 时,
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k+1}(z - z_0)^{k+1}}{a_k(z - z_0)^k} \right| = \frac{|z - z_0|}{R} > 1,$$
级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ 发散.

2.1 正幂级数

性质:

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ 在收敛圆内任一闭区域上一致收敛.

2.1 正幂级数

性质:

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ 在收敛圆内任一闭区域上一致收敛.

- 证明: 以 z_0 为圆心, $R_1(< R)$ 为半径作一个圆 C_{R_1} , 在 C_{R_1} 上或内部, 有

$$|a_k(z-z_0)^k| \leq |a_k| R_1^k.$$

因为 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| R_1^k$ 收敛, 则 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ 在 C_{R_1} 上或内部一致收敛.

2.2 一般幂级数

一般幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k}$$

其中第一项是正幂部分, 第二项是负幂部分.

2.2 一般幂级数

一般幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k} (z - z_0)^{-k}$$

其中第一项是正幂部分, 第二项是负幂部分.

- 正幂部分的收敛半径: $R_1 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$, 即当 $|z - z_0| < R_1$ 时, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ 一致且绝对收敛.

2.2 一般幂级数

● 关于负幂部分

令 $t = (z - z_0)^{-1}$, 则 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}t^k$.

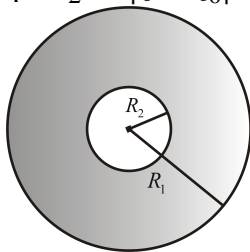
对 t 来说, 收敛半径 $R'_2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{-k}}{a_{-k-1}} \right| = \frac{1}{R_2}$.

当 $|t| < R'_2$, 即 $|z - z_0| > R_2$ 时,

$\sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}t^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z - z_0)^{-k}$ 一致且绝对收敛.

2.2 一般幂级数

- 所以, 综合起来, 如果 $R_2 < R_1$, 则一般幂级数在 $R_2 < |z - z_0| < R_1$ 的环域内一致且绝对收敛.



2.3 幂级数与解析函数的关系

正幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

$(z - z_0)^k$ 在全平面解析, 而级数只在收敛圆内一致收敛并解析.

2.3 幂级数与解析函数的关系

因此, $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z - z_0)^k$ 在收敛圆内解析,¹² 而且

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{d^n}{dz^n} (z - z_0)^k.$$

即, 求和与求导可交换顺序.

¹²证明见书p.36, 利用了Cauchy积分公式.

2.3 幂级数与解析函数的关系

例1: $1 + z + z^2 + \cdots$, $a_k = 1$, $z_0 = 0$, $R = 1$.

$$1 + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{1 - z}, \quad |z| < 1.$$

和函数在收敛圆周上有奇点+1.

例2: $1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots$.

$$1 - z^2 + z^4 - z^6 + \cdots = \frac{1}{1 + z^2}, \quad |z| < 1.$$

和函数在收敛圆周上有奇点 $\pm i$.

2.3 幂级数与解析函数的关系

- 一般幂级数, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k}$ 代表一个收敛环域内部的解析函数.

2.3 幂级数与解析函数的关系

- 一般幂级数, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k + \sum_{k=1}^{\infty} a_{-k}(z-z_0)^{-k}$ 代表一个收敛环域内部的解析函数.

例3

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k - \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k$$

2.3 幂级数与解析函数的关系

- 当 $|z| < 2$ 时,

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{1}{z - 2}$$

2.3 幂级数与解析函数的关系

- 当 $|z| < 2$ 时,

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{2}} = \frac{1}{z - 2}$$

- 当 $|z| > 1$ 时,

$$-\frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z}} = -\frac{1}{z - 1}$$

2.3 幂级数与解析函数的关系

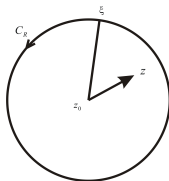
● 所以,

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k - \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^k = \frac{1}{z-2} - \frac{1}{z-1} = \frac{1}{(z-1)(z-2)},$$

其中, $1 < |z| < 2$ 是收敛环域.

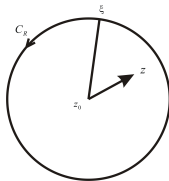
3.1 泰勒(*Taylor*)级数的形式

- 设 $f(z)$ 在 C_R 上, $|z - z_0| = R$, 及其内部解析, 要求把 $f(z)$ 展开成以 z_0 为中心的幂级数.



3.1 泰勒(*Taylor*)级数的形式

- 设 $f(z)$ 在 C_R 上, $|z - z_0| = R$, 及其内部解析, 要求把 $f(z)$ 展开成以 z_0 为中心的幂级数.



- 由 $Cauchy$ 公式:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

3.1 Taylor级数的形式

- 注: z 是 C_R 的内点, ξ 在 C_R 上取值, 所以

$$|\xi - z_0| > |z - z_0|.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \\ &= \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^k. \end{aligned}$$

3.1 Taylor级数的形式

- 注: z 是 C_R 的内点, ξ 在 C_R 上取值, 所以

$$|\xi - z_0| > |z - z_0|.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \\ &= \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^k. \end{aligned}$$

- 此级数对 ξ 而言在 C_R 上一致收敛.

3.1 Taylor级数的形式

则¹³

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} f(\xi) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi \equiv \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

其中

$$a_k \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi = \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

¹³对于收敛级数, 积分与求和可交换秩序.

3.1 *Taylor*级数的形式

● 因此,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

这就是 $f(z)$ 的*Taylor*级数.

¹⁴该展开式是唯一的, 证明见书*p.39*.

3.1 *Taylor*级数的形式

- 因此,

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k.$$

这就是 $f(z)$ 的*Taylor*级数.

- 上面将一个解析函数展开成了以 z_0 为中心的*Taylor*级数!¹⁴

¹⁴该展开式是唯一的, 证明见书p.39.

3.1 *Taylor*级数的形式

*Taylor, Laurent*展开的意义:

- (1) 解析函数的幂级数展开与幂级数对应的解析函数是互逆的问题.
- (2) 求解微分方程的有力工具, 级数解法(将微分方程转化为代数方程求解.)

3.2 Taylor级数的展开方式

(1) 直接求 $f^{(k)}(z_0)$.

例1 $f(z) = e^z, z_0 = 0.$

$$\left. \frac{d^k}{dz^k} e^z \right|_{z=0} = 1.$$

所以,

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k, \quad |z| < \infty.$$

3.2 *Taylor*级数的展开方式

例2 $f(z) = \ln(1 + z), z_0 = 0.$

$$\left. \frac{d^k}{dz^k} \ln(1 + z) \right|_{z=0} = (-1)^{k-1} (k-1)!$$

所以,

$$\ln(1 + z) = \ln 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} z^k, \quad |z| < 1.$$

3.2 Taylor级数的展开方式

(2) 利用已知级数

例3 $f(z) = \frac{1}{z}, z_0 = -1.$

$$\frac{1}{z} = \frac{-1}{1 - (z + 1)} = - \sum_{k=0}^{\infty} (z + 1)^k, \quad |z + 1| < 1.$$

上式利用了 $\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k, |z| < 1.$

3.2 *Taylor*级数的展开方式

例4 $f(z) = e^{\frac{1}{z}}, \quad z_0 = \infty.$

$$e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k, \quad |z| > 0.$$

上式利用了 $e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k, \quad |z| < \infty.$

3.2 *Taylor*级数的展开方式

● 分析

若 $f(t) = e^t$, 则 $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k$, $|t| < \infty$.

设 $t = \frac{1}{z}$, 则 $t_0 = 0 \implies z_0 = \infty$, 而且

$|t| < \infty \implies \left| \frac{1}{z} \right| < \infty$, 即 $|z| > 0$,

所以 $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z} \right)^k$, $|z| > 0$.

3.2 Taylor级数的展开方式

- 分析

若 $f(t) = e^t$, 则 $e^t = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} t^k$, $|t| < \infty$.

设 $t = \frac{1}{z}$, 则 $t_0 = 0 \implies z_0 = \infty$, 而且

$|t| < \infty \implies \left| \frac{1}{z} \right| < \infty$, 即 $|z| > 0$,

所以 $e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z} \right)^k$, $|z| > 0$.

- 注: $z_0 = \infty$ 是 $e^{\frac{1}{z}}$ 的常点, 相当于 $t_0 = 0$ 是 e^t 的常点.

3.2 *Taylor*级数的展开方式

(3) 逐项求导或求积分

例5

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad z_0 = 0.$$

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = \frac{d}{dz} \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} k z^{k-1}, \quad |z| < 1.$$

3.2 Taylor级数的展开方式

例6 $f(z) = \ln(1+z)$, $z_0 = 0$.

$$\begin{aligned}\ln(1+z) &= \int_0^z \frac{d\xi}{1+\xi} + \ln 1 = \ln 1 + \int_0^z \left[\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \xi^k \right] d\xi \\ &= \ln 1 + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} z^{k+1}, \quad |z| < 1.\end{aligned}$$

3.2 *Taylor*级数的展开方式

(4) 有理分式分解成部分分式

例7

$$f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}, \quad z_0 = 0$$

3.2 Taylor级数的展开方式

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z^2 - 3z + 2} &= \frac{1}{(z-2)(z-1)} = -\frac{1}{z-1} + \frac{1}{z-2} \\
 &= \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{k+1}}\right) z^k, \quad |z| < 1.
 \end{aligned}$$

3.2 Taylor级数的展开方式

(5) 级数相乘

例8

$$\frac{1}{(z-2)(z-1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{z}{2}} \cdot \frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2^{k+1}} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} z^l.$$

令 $m = k + l$, $k = m - l$. 因为 k 最小是 0, 所以 l 最大是 m . 因此,

3.2 *Taylor*级数的展开方式

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{z^2 - 3z + 2} &= \sum_{m=0}^{\infty} z^m \cdot \sum_{l=0}^m \frac{1}{2^{m-l+1}} \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} z^m \frac{1}{2^{m+1}} \cdot \sum_{l=0}^m 2^l \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} z^m \frac{1}{2^{m+1}} (2^{m+1} - 1) \\
 &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{m+1}}\right) z^m.
 \end{aligned}$$

3.2 Taylor级数的展开方式

★ 本例的另外一种解法:

令 $m = k + l$, $m : 0, \infty$. 又 $k = m - l$, 因为 k 最小值为 0, 所以 l 最大值是 m . 因此,

$$\begin{aligned}\frac{1}{(z-2)(z-1)} &= \sum_{k=0}^{\infty} z^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} \frac{z^l}{2^{l+1}} = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \cdot \sum_{l=0}^m \frac{1}{2^{l+1}} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{2^{m+1}}\right) z^m.\end{aligned}$$

3.2 *Taylor*级数的展开方式

(6) 待定系数法

例9

$$f(z) = \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad z_0 = 0.$$

3.2 *Taylor*级数的展开方式

(6) 待定系数法

例9

$$f(z) = \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad z_0 = 0.$$

3.2 *Taylor*级数的展开方式

(6) 待定系数法

例9

$$f(z) = \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad z_0 = 0.$$

● 我们知道,

$$\cos z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} z^{2k}, \quad |z| < \infty.$$

3.2 Taylor级数的展开方式

● 令 $f(z) = \sec z = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, 则有

$$\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\right) \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) = 1.$$

3.2 *Taylor*级数的展开方式

● 令 $f(z) = \sec z = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$, 则有

$$\left(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots\right) \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots\right) = 1.$$

● 比较系数可得 a_k .

4.1 罗朗级数的形式

目的: 研究复变函数奇点的性质.¹⁵

¹⁵ 罗朗级数是环域内解析函数的幂级数展开形式.

4.1 罗朗级数的形式

利用*Cauchy*积分公式:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi.$$

4.1 罗朗级数的形式

● 在 C_{R_1} 上:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}} \\
 &= \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^k \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^k}{(\xi - z_0)^{k+1}}, \quad \left| \frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right| < 1.
 \end{aligned}$$

4.1 罗朗级数的形式

● 在 C_{R_2} 上:

$$\begin{aligned}\frac{1}{\xi - z} &= \frac{1}{(\xi - z_0) - (z - z_0)} = -\frac{1}{z - z_0} \frac{1}{1 - \frac{\xi - z_0}{z - z_0}} \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}}, \quad \left| \frac{\xi - z_0}{z - z_0} \right| < 1.\end{aligned}$$

4.1 罗朗级数的形式

考虑到积分与求和可以交换顺序，得：

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= -\frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\xi - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}} f(\xi) d\xi \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2}} f(\xi) \frac{(\xi - z_0)^k}{(z - z_0)^{k+1}} d\xi. \end{aligned}$$

● 下面将 $\oint_{C_{R_2}}$ 变成 $\oint_{C_{R_1}}$!

4.1 罗朗级数的形式

令 $l = -(k + 1)$, 则 $k = -l - 1$, 因此¹⁶

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2}} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi &= \sum_{l=-1}^{-\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_2}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{l+1}} d\xi \cdot (z - z_0)^l \\ &= \sum_{l=-1}^{-\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{l+1}} d\xi \cdot (z - z_0)^l. \end{aligned}$$

¹⁶第二个等式利用了复连通域的Cauchy定理.

4.1 罗朗级数的形式

$$\begin{aligned}
 \text{所以: } f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi \cdot (z - z_0)^k \\
 &+ \sum_{l=-1}^{-\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{l+1}} d\xi \cdot (z - z_0)^l \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi \cdot (z - z_0)^k \\
 &\equiv \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k.
 \end{aligned}$$

4.1 罗朗级数的形式

上式是 $f(z)$ 的罗朗级数, 既含正幂项, 又含负幂项, 其中¹⁷

$$a_k \equiv \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_{R_1}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi \neq \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!}.$$

¹⁷不等号的出现是因为 $f(\xi)$ 不满足 *Cauchy* 积分公式的条件, 此条件要求它在 C_{R_1} 上及其内部解析.

4.1 罗朗级数的形式

Taylor 级数与 *Laurent* 级数的区别与联系:

4.1 罗朗级数的形式

Taylor 级数与 *Laurent* 级数的区别与联系:

- $f(z)$ 的 *Taylor* 级数一般用于研究 $f(z)$ 常点(展开中心)的性质;

4.1 罗朗级数的形式

Taylor 级数与 *Laurent* 级数的区别与联系:

- $f(z)$ 的 *Taylor* 级数一般用于研究 $f(z)$ 常点(展开中心)的性质;
- $f(z)$ 的 *Laurent* 级数一般用于研究 $f(z)$ 奇点的性质.

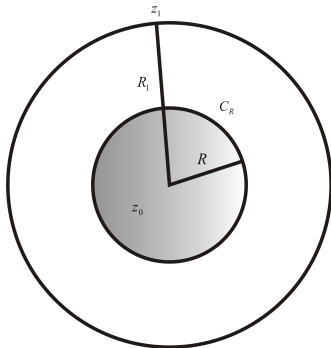
4.1 罗朗级数的形式

- 设 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点, z_1 是离 z_0 最近的 $f(z)$ 的另一个孤立奇点. 若 $|z_1 - z_0| = R_1$, 则 $f(z)$ 在 $0 < |z_1 - z_0| < R_1$ 内解析, 因此 $f(z)$ 可展开成以 z_0 为中心的 *Laurent* 级数.

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_R} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}}.$$

4.1 罗朗级数的形式

- 环域确定以后, *Laurent* 展开式是唯一的.



4.2 *Laurent*级数的展开方式

- (1) 直接求系数(没有太大的实用价值)

4.2 *Laurent*级数的展开方式

- (1) 直接求系数(没有太大的实用价值)
- (2) 利用已知级数

4.2 *Laurent*级数的展开方式

- (1) 直接求系数(没有太大的实用价值)
- (2) 利用已知级数

例1

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}, \quad z_0 = 0.$$

4.2 *Laurent*级数的展开方式

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k}, \quad |z| < \infty. \end{aligned}$$

特点: 无负幂项, $z_0 = 0$ 称为可去奇点.

4.2 *Laurent*级数的展开方式

例2 $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}, \quad z_0 = 1.$

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z-1} \cdot \frac{-1}{1-(z-1)} = -\frac{1}{z-1} \sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^k \\ &= -\sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^{k-1}, \quad |z-1| < 1. \end{aligned}$$

特点: 存在有限多个负幂项(此例中是一个负幂项), $z_0 = 1$ 称为极点(此例中为一阶极点).

4.2 *Laurent*级数的展开方式

例3

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}}, \quad z_0 = 0.$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k, \quad \left|\frac{1}{z}\right| < \infty, \text{ 或 } |z| > 0.$$

特点: 有无限多个负幂项, $z_0 = 0$ 称为本性奇点.
*Laurent*级数的正幂部分叫解析部分, 负幂部分叫主要部分(体现奇点的性质).

4.3 无穷远点邻域的 $Laurent$ 级数

- 如果 $f(z)$ 在 $R < |z| < \infty$ 内解析, 则在此环域内 $f(z)$ 的 $Laurent$ 级数是唯一的.

4.3 无穷远点邻域的 $Laurent$ 级数

- 如果 $f(z)$ 在 $R < |z| < \infty$ 内解析, 则在此环域内 $f(z)$ 的 $Laurent$ 级数是唯一的.
- 令 $t = \frac{1}{z}$, 在 $t = 0$ 的邻域内作展开, 即对应 z 在无穷远点的展开.

4.3 无穷远点邻域的 $Laurent$ 级数

- 如果 $f(z)$ 在 $R < |z| < \infty$ 内解析, 则在此环域内 $f(z)$ 的 $Laurent$ 级数是唯一的.
- 令 $t = \frac{1}{z}$, 在 $t = 0$ 的邻域内作展开, 即对应 z 在无穷远点的展开.
- e^z , $\cos z$, $\sin z$, $\sinh z$, $\coth z$ 在 $z_0 = \infty$ 是奇点, 他们在 $z_0 = 0$ 点邻域的 $Taylor$ 级数就是无穷远邻域的 $Laurent$ 级数.

4.3 无穷远点邻域的 $Laurent$ 级数

例1

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k, \quad e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k.$$

4.3 无穷远点邻域的 $Laurent$ 级数

例1

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k, \quad e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k.$$

- 第一个展开式既表示零点的 $Taylor$ 级数, 也表示无穷远点的 $Laurent$ 级数.

4.3 无穷远点邻域的 $Laurent$ 级数

例1

$$e^z = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k, \quad e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k.$$

- 第一个展开式既表示零点的 $Taylor$ 级数, 也表示无穷远点的 $Laurent$ 级数.
- 第二个展开式既表示无穷远点的 $Taylor$ 级数, 也表示零点的 $Laurent$ 级数.

4.4奇点分类

- z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 把 $f(z)$ 在 z_0 邻域展开成 *Laurent* 级数

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k.$$

下面分别讨论 z_0 为有限远点和无穷远点两种情形.

4.4 奇点分类

● 情形 I: z_0 为有限远点

4.4 奇点分类

● 情形 I: z_0 为有限远点

(1) 可去奇点:

z_0 邻域的 *Laurent* 级数没有负幂项, 即,
 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \text{确定的有限值}.$

4.4 奇点分类

- 情形 I: z_0 为有限远点

(1) 可去奇点:

z_0 邻域的 *Laurent* 级数没有负幂项, 即,
 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \text{确定的有限值}.$

- 例如, $f(z) = \sin z/z, z_0 = 0.$

4.4 奇点分类

(2) 极点:

z_0 邻域的 *Laurent* 级数存在有限个负幂次项, 则 z_0 是 $f(z)$ 的极点. 更确切的说, 若

$$f(z) = a_{-m}(z - z_0)^{-m} + a_{-m+1}(z - z_0)^{-m+1} + \cdots \\ + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots,$$

则称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点, 且有 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$.

4.4 奇点分类

例如,

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = - \sum_{k=0}^{\infty} (z-1)^{k-1}.$$

$z_0 = 1$ 是一阶极点(单极点), 且 $\lim_{z \rightarrow 1} f(z) = \infty$.

4.4奇点分类

(3) 本性奇点:

z_0 邻域的 $Laurent$ 级数有无穷多负幂次项,
且 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 没有确定值, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点.

4.4奇点分类

(3) 本性奇点:

z_0 邻域的 *Laurent* 级数有无穷多负幂次项, 且 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 没有确定值, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点.

● 例如,

$$f(z) = e^{\frac{1}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{z}\right)^k, \quad z_0 = 0.$$

4.4 奇点分类

$$\lim_{z \rightarrow 0} e^{\frac{1}{z}} = \begin{cases} \infty, & z \text{ 沿正 } x \text{ 轴趋于零.} \\ 0, & z \text{ 沿负 } x \text{ 轴趋于零.} \\ 1, & z \text{ 沿 } z_n = \frac{1}{i2n\pi} \text{ 趋于零.} \\ \text{不定, } & z \text{ 沿 } y \text{ 轴趋于零.} \end{cases}$$

4.4奇点分类

- 情形 II: $z_0 = \infty$.

4.4奇点分类

● 情形 II: $z_0 = \infty$.

(1) 可去奇点(解析点):

无正幂项.

4.4奇点分类

● 情形 II: $z_0 = \infty$.

(1) 可去奇点(解析点):

无正幂项.

(2) 极点:

有限个正幂次项, 且 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z) = \infty$.

4.4奇点分类

(3) 本性奇点:

有无穷多个正幂次项, 且 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ 不确定.

4.4 奇点分类

(3) 本性奇点:

有无穷多个正幂次项, 且 $\lim_{z \rightarrow \infty} f(z)$ 不确定.

- 情形 I 与情形 II 的联系:

令 $\xi = \frac{1}{z}$, 则 $z_0 = 0$ 对应于 $\xi = \infty$, 有关解析延拓参见书 p.41 - 43.

留数定理

第五章、留数定理

1.1 留数(residue, 残余, 剩余)

若 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点, 在 z_0 邻域的 *Laurent* 级数为

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

则 $(z - z_0)^{-1}$ 的系数 a_{-1} 称为 $f(z)$ 在 z_0 点的留数. 记作 $a_{-1} = \text{Res}f(z_0)$.

1.2 留数定理

- (1) 有限远点的留数定理(指奇点 z_0 为有限远点)

1.2 留数定理

- (1) 有限远点的留数定理(指奇点 z_0 为有限远点)
- 若回路 l 只包围了 $f(z)$ 的一个奇点 z_0 , 且在 z_0 邻域存在如下的 *Laurent* 级数,

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

1.2 留数定理

则可计算回路积分

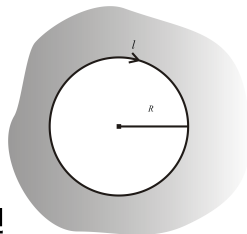
$$\begin{aligned}\oint_l f(z) dz &= \oint_l \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k (z - z_0)^k dz \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \oint_l (z - z_0)^k dz \\ &= 2\pi i a_{-1} = 2\pi i \operatorname{Res} f(z_0).\end{aligned}$$

1.2 留数定理

- 若 l 包围 n 个奇点, $b_1, b_2, \dots, b_n$, 则利用复连通区域的 *Cauchy* 定理, 得到

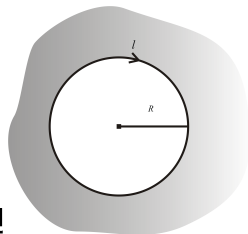
$$\oint_l f(z) dz = 2\pi i \sum_{j=1}^n \operatorname{Res} f(b_j).$$

1.2 留数定理



● (2) 无限远点的留数定理

1.2 留数定理



- (2) 无限远点的留数定理
- 设 $f(z)$ 在 $R < |z| < \infty$ 内解析, 则在该环域内

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k z^k.$$

1.2 留数定理

- 在环域内任取一回路 l , 则由柯西公式

$$\oint_l f(z) dz = -2\pi i a_{-1}.$$

1.2 留数定理

- 在环域内任取一回路 l , 则由柯西公式

$$\oint_l f(z) dz = -2\pi i a_{-1}.$$

- 令 $\text{Res}f(\infty) = -a_{-1}$, 无穷远点的留数, 则

$$\oint_l f(z) dz = 2\pi i \text{Res}f(\infty).$$

1.2 留数定理

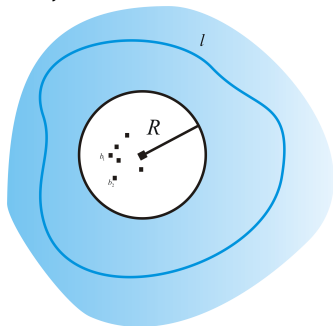
- 扩充的复数平面: 有限区域+无穷远点.

1.2 留数定理

- 扩充的复数平面: 有限区域+无穷远点.
- 下面讨论在扩充的复数平面上各点留数之间的关系.

1.2 留数定理

设 $f(z)$ 有有限个奇点. 显然, 有界域内的奇点必然



被包围在某圆 $R = |z|$ 内.

1.2 留数定理

在 $R < |z| < \infty$ 内取一回路 l , 则

$$\oint_l f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \text{Res} f(b_k),$$

其中 b_k 为 $f(z)$ 在有界域内的奇点.

1.2 留数定理

● 另一方面,

$$\oint_l f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(\infty).$$

¹⁸因为

$$\oint_l f(z) dz + \oint_l f(z) dz = 0$$

1.2 留数定理

- 另一方面,

$$\oint_l f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(\infty).$$

- 所以¹⁸

$$\sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(b_k) + \operatorname{Res} f(\infty) = 0.$$

¹⁸因为

$$\oint_l f(z) dz + \oint_l f(z) dz = 0$$

1.2 留数定理

- 性质: 扩充的复数平面(全平面)上, 各点的留数和为零.

1.2 留数定理

- 性质: 扩充的复数平面(全平面)上, 各点的留数和为零.
- 注1: 有限区域内, 非奇点(常点)的留数一定为零.

1.2 留数定理

- 性质: 扩充的复数平面(全平面)上, 各点的留数和为零.
- 注1: 有限区域内, 非奇点(常点)的留数一定为零.
- 注2: 无穷远点是非奇点时, 其留数可以不为零.

1.3 留数的计算

(1) 有界域内奇点留数的计算

- 对可去奇点 z_0 , $\text{Res}f(z_0) = 0$.

1.3 留数的计算

(1) 有界域内奇点留数的计算

- 对可去奇点 z_0 , $\text{Res}f(z_0) = 0$.

1.3 留数的计算

(1) 有界域内奇点留数的计算

- 对可去奇点 z_0 , $\text{Res}f(z_0) = 0$.
- 本性奇点

1.3 留数的计算

(1) 有界域内奇点留数的计算

- 对可去奇点 z_0 , $\text{Res}f(z_0) = 0$.
- 本性奇点

1.3 留数的计算

(1) 有界域内奇点留数的计算

- 对可去奇点 z_0 , $\text{Res}f(z_0) = 0$.
- 本性奇点
 - (a) 作 *Laurent* 展开

1.3 留数的计算

(1) 有界域内奇点留数的计算

- 对可去奇点 z_0 , $\text{Res}f(z_0) = 0$.
- 本性奇点
 - (a) 作 *Laurent* 展开

1.3 留数的计算

(1) 有界域内奇点留数的计算

- 对可去奇点 z_0 , $\text{Res}f(z_0) = 0$.
- 本性奇点
 - (a) 作 *Laurent* 展开
 - (b) 利用 $\sum_{k=1}^n \text{Res}f(b_k) + \text{Res}f(\infty) = 0$.

1.3 留数的计算

(1) 有界域内奇点留数的计算

- 对可去奇点 z_0 , $\text{Res}f(z_0) = 0$.
- 本性奇点
 - (a) 作 *Laurent* 展开
 - (b) 利用 $\sum_{k=1}^n \text{Res}f(b_k) + \text{Res}f(\infty) = 0$.

1.3 留数的计算

(1) 有界域内奇点留数的计算

- 对可去奇点 z_0 , $\text{Res}f(z_0) = 0$.
- 本性奇点
 - (a) 作 *Laurent* 展开
 - (b) 利用 $\sum_{k=1}^n \text{Res}f(b_k) + \text{Res}f(\infty) = 0$.
 - (c) 用 *Cauchy* 定理和 *Cauchy* 积分公式直接计算 a_{-1} .

1.3 留数的计算

- 如果 z_0 是奇点, 则 $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z - z_0)^k$, 且

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi.$$

1.3 留数的计算

- 如果 z_0 是奇点, 则 $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z - z_0)^k$, 且

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi.$$

- 因此,

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_l f(\xi) d\xi.$$

1.3 留数的计算

- 如果 z_0 是奇点, 则 $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k(z - z_0)^k$, 且

$$a_k = \frac{1}{2\pi i} \oint_l \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{k+1}} d\xi.$$

- 因此,

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_l f(\xi) d\xi.$$

- 思考题: 路径 l 如何选取?

1.3 留数的计算

● (2) 极点留数的计算

1.3 留数的计算

● (2) 极点留数的计算

(a) 一阶极点(单极点) z_0

$$f(z) = a_{-1}(z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots .$$

1.3 留数的计算

● (2) 极点留数的计算

(a) 一阶极点(单极点) z_0

$$f(z) = a_{-1}(z - z_0)^{-1} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots .$$

● 所以,

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z).$$

1.3 留数的计算

(b) m 阶极点

$$f(z) = a_{-m}(z - z_0)^{-m} + a_{-m+1}(z - z_0)^{-m+1} + \cdots \\ + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

1.3 留数的计算

(b) m 阶极点

$$f(z) = a_{-m}(z - z_0)^{-m} + a_{-m+1}(z - z_0)^{-m+1} + \cdots \\ + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

● 第一步,

$$(z - z_0)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \cdots \\ + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + a_0(z - z_0)^m + \cdots$$

1.3 留数的计算

● 第二步,

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] = (m-1)!a_{-1} + m!a_0(z-z_0) + \cdots$$

1.3 留数的计算

- 第二步,

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-z_0)^m f(z)] = (m-1)!a_{-1} + m!a_0(z-z_0) + \cdots$$

- 最后一步,

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-z_0)^m f(z)].$$

1.3 留数的计算

特例: $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$, $P(z)$, $Q(z)$ 在 z_0 解析, 且 z_0 为 $Q(z)$ 的一阶零点, $P(z_0) \neq 0$, 则 z_0 为 $f(z)$ 的一阶极点.

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

1.3 留数的计算

证明:

$$\begin{aligned}\operatorname{Res} f(z_0) &= \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{P(z)}{Q(z)} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P(z) + (z - z_0)P'(z)}{Q'(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{P(z)}{Q'(z)} \\ &= \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.\end{aligned}$$

1.3 留数的计算

例1

$f(z) = \frac{z^{2m}}{z^{2n+1}}$, n, m 正整数, 求奇点的留数.

1.3 留数的计算

例1

$f(z) = \frac{z^{2m}}{z^{2n+1}}$, n, m 正整数, 求奇点的留数.

● 解: 奇点即 $z^{2n} + 1 = 0$ 的根. $z^{2n} = -1$, 则

$$z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{2n}}, \quad k = 0, 1, \dots, (2n-1).$$

1.3 留数的计算

例1

$f(z) = \frac{z^{2m}}{z^{2n+1}}$, n, m 正整数, 求奇点的留数.

- 解: 奇点即 $z^{2n} + 1 = 0$ 的根. $z^{2n} = -1$, 则

$$z_k = e^{i\frac{\pi+2k\pi}{2n}}, \quad k = 0, 1, \dots, (2n-1).$$

- 所有 $2n$ 个 z_k 均为 $f(z)$ 的一阶极点, 所以

$$\operatorname{Res} f(z_k) = \frac{z_k^{2m}}{2nz_k^{2n-1}} = \frac{1}{2n} z_k^{2m-2n+1} = -\frac{1}{2n} e^{i\frac{(2k+1)(2m+1)}{2n}\pi}.$$

1.3 留数的计算

例2

$f(z) = \frac{z}{(z^2 + \frac{2}{\varepsilon}z + 1)^2}$, $0 < \varepsilon < 1$. 求单位圆内奇点的留数.

1.3 留数的计算

例2

$f(z) = \frac{z}{(z^2 + \frac{2}{\varepsilon}z + 1)^2}$, $0 < \varepsilon < 1$. 求单位圆内奇点的留数.

- 解: $f(z)$ 的奇点即 $z^2 + \frac{2}{\varepsilon}z + 1 = 0$ 的根.
奇点:

$$z_1 = \frac{-1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}, \quad z_2 = \frac{-1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$$

1.3 留数的计算

- 因为 $z_1 \cdot z_2 = 1$, $|z_1| \cdot |z_2| = 1$, 且 $|z_2| > |z_1|$, 所以 z_1 在单位圆内, z_1, z_2 均为二阶极点.

1.3 留数的计算

- 因为 $z_1 \cdot z_2 = 1$, $|z_1| \cdot |z_2| = 1$, 且 $|z_2| > |z_1|$, 所以 z_1 在单位圆内, z_1, z_2 均为二阶极点.
- 所以

$$\begin{aligned}
 \operatorname{Res} f(z_1) &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left[(z - z_1)^2 f(z) \right] \\
 &= \lim_{z \rightarrow z_1} \frac{d}{dz} \left[(z - z_1)^2 \frac{z}{(z - z_1)^2 (z - z_2)^2} \right] \\
 &= \frac{\varepsilon^2}{4(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

1.3 留数的计算

例3

$f(z) = \frac{e^z}{z^2+a^2}$, $a > 0$. 求各奇点的留数.

1.3 留数的计算

例3

$f(z) = \frac{e^z}{z^2 + a^2}$, $a > 0$. 求各奇点的留数.

- 解: $z_1 = \infty$ 本性奇点; $z_2 = ai$, $z_3 = -ai$, 一阶极点.

1.3 留数的计算

例3

$f(z) = \frac{e^z}{z^2 + a^2}$, $a > 0$. 求各奇点的留数.

- 解: $z_1 = \infty$ 本性奇点; $z_2 = ai$, $z_3 = -ai$, 一阶极点.
- z_2 的留数

$$\operatorname{Res} f(ai) = \lim_{z \rightarrow ai} \left[(z - ai) \frac{e^z}{z^2 + a^2} \right] = \frac{e^{ia}}{i2a}.$$

1.3 留数的计算

● z_3 的留数

$$\operatorname{Res} f(-ai) = \lim_{z \rightarrow -ai} \left[(z + ia) \frac{e^z}{z^2 + a^2} \right] = -\frac{e^{-ia}}{i2a}$$

1.3 留数的计算

● z_3 的留数

$$\operatorname{Res} f(-ai) = \lim_{z \rightarrow -ai} \left[(z + ia) \frac{e^z}{z^2 + a^2} \right] = -\frac{e^{-ia}}{i2a}$$

● 无穷远点的留数

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -[\operatorname{Res} f(ia) + \operatorname{Res} f(-ia)] = -\frac{1}{a} \sin a.$$

1.3 留数的计算

另一种方法计算 $\text{Res}f(\infty)$.

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \frac{e^z}{z^2 + a^2} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \right) \cdot \frac{1}{z^2} \frac{1}{1 + \frac{a^2}{z^2}} \\
 &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \right) \cdot \frac{1}{z^2} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \left(\frac{a^2}{z^2} \right)^l, \quad a < |z| < \infty \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k \cdot \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{a^{2l}}{z^{2l+2}} \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{k-2l-2} (-1)^l a^{2l}.
 \end{aligned}$$

1.3 留数的计算

● 令 $k - 2l - 2 = n, \quad n: -\infty, +\infty.$

$$2l = k - n - 2$$

1.3 留数的计算

- 令 $k - 2l - 2 = n$, $n: -\infty, +\infty$.

$$2l = k - n - 2$$

- 所以

$$\begin{aligned}
 f(z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k!} z^n (-1)^{\frac{k-n-2}{2}} a^{k-n-2} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} z^n \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (-1)^{\frac{k-n-2}{2}} a^{k-n-2} \right].
 \end{aligned}$$

1.3 留数的计算

当 $n = -1$ 时, 上述中括号就是 a_{-1} :

$$a_{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{1}{k!} a^{k-1}$$

下面计算这个数项级数.

1.3 留数的计算

- 当 $n = -1$ 时, $k = 2l + 1$, 即 $k = 1, 3, 5, \dots$,
($k = 2m + 1$), 所以

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{a(2m+1)!} a^{2m+1} \\ &= \frac{1}{a} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!} a^{2m+1} = \frac{1}{a} \sin a. \end{aligned}$$

1.3 留数的计算

- 当 $n = -1$ 时, $k = 2l + 1$, 即 $k = 1, 3, 5, \dots$,
($k = 2m + 1$), 所以

$$\begin{aligned} a_{-1} &= \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{a(2m+1)!} a^{2m+1} \\ &= \frac{1}{a} \cdot \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{1}{(2m+1)!} a^{2m+1} = \frac{1}{a} \sin a. \end{aligned}$$

- 所以

$$\operatorname{Res} f(\infty) = -a_{-1} = -\frac{1}{a} \sin a.$$

1.3 留数的计算

附加例题1: $p.48$ (15)

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2 - 1)^2}, \quad 0 < |z| < 1; \quad 1 < |z| < \infty.$$

1.3 留数的计算

附加例题1: p.48 (15)

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2 - 1)^2}, \quad 0 < |z| < 1; \quad 1 < |z| < \infty.$$

- 在第一个展开区域 $0 < |z| < 1$,

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + 2 + 3z^2 + 4z^4 + \cdots + kz^{2k-4} + \cdots;$$

1.3 留数的计算

附加例题1: p.48 (15)

$$f(z) = \frac{1}{z^2(z^2 - 1)^2}, \quad 0 < |z| < 1; \quad 1 < |z| < \infty.$$

- 在第一个展开区域 $0 < |z| < 1$,

$$f(z) = \frac{1}{z^2} + 2 + 3z^2 + 4z^4 + \cdots + kz^{2k-4} + \cdots;$$

- 在第二个展开区域 $1 < |z| < \infty$,

$$f(z) = \frac{1}{z^6} + \frac{2}{z^8} + \frac{3}{z^{10}} + \cdots + \frac{k-2}{z^{2k}} + \cdots.$$

1.3 留数的计算

问题:

若设 $t = \frac{1}{z}$, 则 $0 < |z| < 1$ 变成 $1 < |t| < \infty$, 为什么在第一问的结果中取 $z = \frac{1}{t}$, 不是第二问的结果?

1.3 留数的计算

回答:

(1) 对一个确定的复变函数 $f(z)$, 不同的收敛区域其级数的形式一般不同.

(2) 设 $t = \frac{1}{z}$, 则相应地, $f(z)$ 变成:

$$f(t) = \frac{1}{\left(\frac{1}{t}\right)^2 \left[\left(\frac{1}{t}\right)^2 - 1\right]^2} = \frac{t^6}{(1 - t^2)^2}.$$

1.3 留数的计算

此时, $f(t)$ 在 $1 < |t| < \infty$ 区域的级数展开一定是上述第一问结果中将 $z \rightarrow \frac{1}{t}$ 的形式, 即

$$f(t) = t^2 + 2 + \frac{3}{t^2} + \frac{4}{t^4} + \cdots + \frac{k}{t^{2k-4}} + \cdots, \quad 1 < |t| < \infty.$$

1.3 留数的计算

附加例题2:

$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$, 求 $z_0 = 0$ 点的留数.

1.3 留数的计算

附加例题2:

$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$, 求 $z_0 = 0$ 点的留数.

回答:

$z_0 = 0$ 是多值的函数 $f(z)$ 的支点. 留数定理只涉及到奇点, 并不涉及支点.

1.3 留数的计算

附加例题2:

$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z}}$, 求 $z_0 = 0$ 点的留数.

回答:

$z_0 = 0$ 是多值的函数 $f(z)$ 的支点. 留数定理只涉及到奇点, 并不涉及支点.

- 另外, *Laurent*级数是关于环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内单值解析函数的展开式, 没有包括多值函数.

1.3 留数的计算

附加例题3:

当 a 取何值时,

$$\int_{z_0}^z e^z \left(\frac{1}{z} + \frac{a}{z^3} \right) dz$$

是单值函数. (a 是常数.)

1.3 留数的计算

附加例题3:

当 a 取何值时,

$$\int_{z_0}^z e^z \left(\frac{1}{z} + \frac{a}{z^3} \right) dz$$

是单值函数. (a 是常数.)

- 解: 考察内容是复变函数积分+多值函数形式

1.3 留数的计算

先看第二项积分:

$$\begin{aligned} a \int_{z_0}^z \frac{e^z}{z^3} dz &= -\frac{a}{2} \int_{z_0}^z e^z d\frac{1}{z^2} = -\frac{a e^z}{2 z^2} \Big|_{z_0}^z + \frac{a}{2} \int_{z_0}^z \frac{e^z}{z^2} dz \\ &= -\frac{a e^z}{2 z^2} \Big|_{z_0}^z - \frac{a}{2} \int_{z_0}^z e^z d\frac{1}{z} \\ &= -\frac{a e^z}{2 z^2} \Big|_{z_0}^z - \frac{a e^z}{2 z} \Big|_{z_0}^z + \frac{a}{2} \int_{z_0}^z \frac{e^z}{z} dz. \end{aligned}$$

1.3 留数的计算

$$\begin{aligned}
 & \int_{z_0}^z e^z \left(\frac{1}{z} + \frac{a}{z^3} \right) dz \\
 = & -\frac{a}{2} \left(\frac{e^z}{z} + \frac{e^z}{z^2} \right) \Big|_{z_0}^z + \left(1 + \frac{a}{2} \right) \int_{z_0}^z \frac{e^z}{z} dz \\
 = & -\frac{a}{2} \left(\frac{e^z}{z} + \frac{e^z}{z^2} \right) \Big|_{z_0}^z + \left(1 + \frac{a}{2} \right) \int_{z_0}^z e^z d \ln z \\
 = & -\frac{a}{2} \left(\frac{e^z}{z} + \frac{e^z}{z^2} \right) \Big|_{z_0}^z + \left(1 + \frac{a}{2} \right) \left(e^z \ln z \Big|_{z_0}^z - \int_{z_0}^z e^z \ln z dz \right).
 \end{aligned}$$

1.3 留数的计算

- 上式第一项是单值函数, 而第二项中含多值函数 $\ln z$,

1.3 留数的计算

- 上式第一项是单值函数, 而第二项中含多值函数 $\ln z$,
- 所以, 当 $1 + \frac{a}{2} = 0$, 即

$$a = -2$$

时, 原来的积分式是单值函数.

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

● (1) 变数变换

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

- (1) 变数变换
- (2) 加上一段路径 C , 使 $\int_C f(z)dz = 0$ 或易于计算.

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

类型 I

$$I = \int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x) dx,$$

其中 R 为 $\cos x, \sin x$ 的有理函数, 在 $[0, 2\pi]$ 上连续.

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

● 令 $z = e^{ix}$, 则 $\cos x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$,
 $\sin x = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$,

$$dx = \frac{dz}{iz}$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

- 令 $z = e^{ix}$, 则 $\cos x = \frac{1}{2}(z + z^{-1})$,
 $\sin x = \frac{1}{2i}(z - z^{-1})$,

$$dx = \frac{dz}{iz}$$

- 所以

$$I = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z + z^{-1}}{2}, \frac{z - z^{-1}}{2i}\right) \frac{dz}{iz}.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

例1

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 + \varepsilon \cos x)^2}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

例1

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{dx}{(1 + \varepsilon \cos x)^2}, \quad 0 < \varepsilon < 1.$$

● 解：首先做变换

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{1}{\left(1 + \varepsilon \frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2} \frac{dz}{iz} = \frac{4}{i\varepsilon^2} \oint_{|z|=1} \frac{z}{\left(z^2 + \frac{2}{\varepsilon}z + 1\right)^2} dz.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

- 显然, $f(z) = \frac{z}{(z^2 + \frac{2}{\varepsilon}z + 1)^2}$ 在 $|z| = 1$ 内的奇点为 $\frac{-1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$, 其留数为

$$\text{Res}f\left(\frac{-1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon^2}{4(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

- 显然, $f(z) = \frac{z}{(z^2 + \frac{2}{\varepsilon}z + 1)^2}$ 在 $|z| = 1$ 内的奇点为 $\frac{-1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}$, 其留数为

$$\text{Res}f\left(\frac{-1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}\right) = \frac{\varepsilon^2}{4(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}.$$

- 所以

$$I = \frac{4}{i\varepsilon^2} \cdot 2\pi i \text{Res}f\left(\frac{-1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}}{\varepsilon}\right) = \frac{2\pi}{(1 - \varepsilon^2)^{3/2}}.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

类型 II

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

要求:

- ① $f(z)$ 在实轴上无奇点, 且在上半平面只有有限个奇点.
- ② 当 z 在上半平面或在实轴上趋于 ∞ 时, $zf(z)$ 一致趋于零.

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

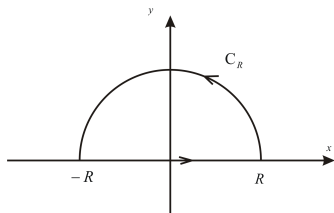
- 可以证明: $I = 2\pi i[f(z)$ 在上半平面所有奇点留数之和].

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

- 可以证明: $I = 2\pi i[f(z)$ 在上半平面所有奇点留数之和].
- 证明:

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x)dx.$$

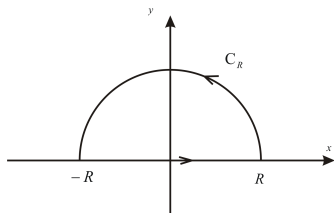
2.1 将定积分变成复变函数的回路积分



● 回路 $l: [-R, R] + C_R$.

$$\oint_l f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分



- 回路 $l: [-R, R] + C_R$.

$$\oint_l f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz.$$

- 上式第二项是增加了的一段路径积分.

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

显然，利用留数定理：

$$\begin{aligned}
 & \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_I f(z) dz \\
 &= 2\pi i [f(z) \text{ 在上半平面所有奇点的留数和}] \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz.
 \end{aligned}$$

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \int_{C_R} |zf(z)| \left| \frac{dz}{z} \right| \leq \text{Max } |zf(z)|_{C_R} \cdot \pi \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

例2

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n} + 1} dx, \quad n > m, \text{ 正整数.}$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

例2

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{x^{2n} + 1} dx, \quad n > m, \text{ 正整数.}$$

- 解: $f(z) = \frac{z^{2m}}{z^{2n} + 1}$ 满足条件 ① 和 ②.
它在上半平面有 n 个一阶极点,

$$z_k = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}}, \quad k = 0, 1, \dots, (n-1).$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

- 前面的例题已给出它们的留数为:

$$\operatorname{Res} f(z_k) = -\frac{1}{2n} e^{i \frac{(2k+1)(2m+1)}{2n} \pi}$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

- 前面的例题已给出它们的留数为:

$$\text{Res}f(z_k) = -\frac{1}{2n}e^{i\frac{(2k+1)(2m+1)}{2n}\pi}$$

- 所以¹⁹

$$I = 2\pi i \left(-\frac{1}{2n}\right) \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{(2m+1)\pi}{2n}(2k+1)} = \frac{\frac{\pi}{n}}{\sin \frac{(2m+1)}{2n}\pi}.$$

¹⁹等比数列 n 项和公式.

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

类型 III

$$I = \int_0^{+\infty} F(x) \cos mx dx,$$

或

$$I = \int_0^{+\infty} G(x) \sin mx dx.$$

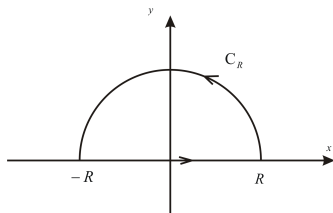
2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

要求:²⁰

- ① $m > 0$;
- ② $F(x)$ 为偶函数, $G(x)$ 为奇函数;
- ③ $F(z)$, $G(z)$ 在实轴上无奇点, 在上半平面有有限个奇点;
- ④ 当 z 在上半平面和实轴上趋于 ∞ 时, $F(z)$, $G(z)$ 一致趋于零.

²⁰若 $F(x)$ 既非偶函数, 又非奇函数, 则 $F(x) = \frac{1}{2}[F(x)+F(-x)] + \frac{1}{2}[F(x)-F(-x)]$, 第一项为偶, 第二项为奇.

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分



可以证明：

$$I = \int_0^{+\infty} F(x) \cos mx dx = \pi i [F(z) e^{imz} \text{ 在上半平面所有奇点的留数和}].$$

$$I = \int_0^{+\infty} G(x) \sin mx dx = \pi [G(z) e^{imz} \text{ 在上半平面所有奇点的留数和}].$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

● 证明:

$$\int_0^{+\infty} F(x) \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{imx} dx$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

● 证明:

$$\int_0^{+\infty} F(x) \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{imx} dx$$

● $l : [-R, R] + C_R$.

$$\oint_l F(z) e^{imz} dz = \int_{-R}^R F(x) e^{imx} dx + \int_{C_R} F(z) e^{imz} dz.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

$$\begin{aligned}
 & \lim_{R \rightarrow \infty} \oint_l F(z) e^{imz} dz \\
 &= 2\pi i [F(z) e^{imz} \text{ 在上半平面所有奇点的留数和}]. \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{imx} dx + \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(z) e^{imz} dz.
 \end{aligned}$$

利用约当引理计算上式第二项(约当引理及其证明参见书 p.60).

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

- 利用约当引理, 可以证明:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(z) e^{imz} dz = 0.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

- 利用约当引理, 可以证明:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(z) e^{imz} dz = 0.$$

- 所以
$$\int_0^{+\infty} F(x) \cos mx dx = \pi i [F(z) e^{imz} \text{ 在上半平面所有奇点的留数和}].$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

- 利用约当引理, 可以证明:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} F(z) e^{imz} dz = 0.$$

- 所以

$$\int_0^{+\infty} F(x) \cos mx dx = \pi i [F(z) e^{imz} \text{ 在上半平面所有奇点的留数和}].$$
- 同理可证,

$$\int_0^{+\infty} G(x) \sin mx dx = \pi [G(z) e^{imz} \text{ 在上半平面所有奇点的留数和}].$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

- 类型 II 与类型 III 之间的关系:²¹

²¹类型 III 比类型 II 的条件宽松.

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

- 类型 II 与类型 III 之间的关系:²¹
- 类型 II: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$.

²¹ 类型 III 比类型 II 的条件宽松.

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

- 类型 II 与类型 III 之间的关系:²¹
- 类型 II: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$, $\lim_{z \rightarrow \infty} z f(z) = 0$.
- 类型 III:

$$\int_0^{+\infty} F(x) \cos mx dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) e^{imx} dx,$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0.$$

²¹ 类型 III 比类型 II 的条件宽松.

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

对类型 III, 若 $m < 0$, 则

$$\int_0^{+\infty} F(x) \cos mx dx = \int_0^{+\infty} F(x) \cos |m|x dx.$$

$$\int_0^{+\infty} G(x) \sin mx dx = - \int_0^{+\infty} G(x) \sin |m|x dx.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

例3

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx, \quad a, b > 0.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

例3

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx, \quad a, b > 0.$$

● 作解析延拓

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)},$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

例3

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx, \quad a, b > 0.$$

- 作解析延拓

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + a^2)(z^2 + b^2)},$$

- 上半平面二个单极点: ia, ib .

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

● 因此

$$\operatorname{Res} f(ia) = \frac{e^{-a}}{2ia(-a^2 + b^2)}, \quad \operatorname{Res} f(ib) = \frac{e^{-b}}{2ib(a^2 - b^2)}.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

● 因此

$$\operatorname{Res} f(ia) = \frac{e^{-a}}{2ia(-a^2 + b^2)}, \quad \operatorname{Res} f(ib) = \frac{e^{-b}}{2ib(a^2 - b^2)}.$$

● 所以

$$\begin{aligned} I &= \pi i \cdot \frac{1}{2i(a^2 - b^2)} \left(-\frac{e^{-a}}{a} + \frac{e^{-b}}{b} \right) \\ &= \frac{\pi}{2(a^2 - b^2)} \left(\frac{e^{-b}}{b} - \frac{e^{-a}}{a} \right). \end{aligned}$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

类型 IV

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

实轴上有奇点, $f(x)$ 有奇点 c , 且 $a < c < b$.

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

● 广义积分:

如果 $\int_a^b f(x)dx$ 不存在, 但 $\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx$ 和 $\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$ 存在 ($\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$), 则称 $\int_a^b f(x)dx$ 的广义积分存在, 且定义为

$$\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

- 积分主值: 如果 $\int_a^b f(x)dx$ 的广义积分不存在, 即 $\lim_{\varepsilon_1 \rightarrow 0} \int_a^{c-\varepsilon_1} f(x)dx$ 和 $\lim_{\varepsilon_2 \rightarrow 0} \int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$ 至少一个不存在, 但是

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x)dx \right]$$

存在, 则称 $\int_a^b f(x)dx$ 在 *Cauchy* 主值意义下存在, 并称此极限为 $\int_a^b f(x)dx$ 的积分主值.

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

● 记作

$$P \int_a^b f(x) dx \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_a^{c-\varepsilon} f(x) dx + \int_{c+\varepsilon}^b f(x) dx \right].$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

准类型 II

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

准类型 II

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

准类型 II

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

- ① $f(z)$ 在实轴上有 n 个一阶极点 b_k , $k = 1, 2, \dots, n$; 在上半平面有限远处有 m 个奇点 a_l , $l = 1, 2, \dots, m$.

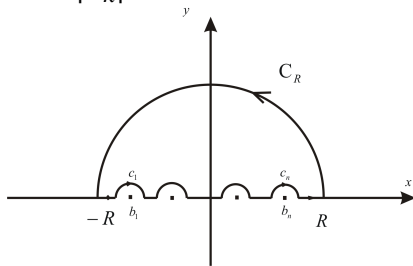
2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

- ② 当 z 在上半平面或实轴上趋于 ∞ 时, $zf(z)$ 一致趋于零, 则

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{l=1}^m \text{Res}f(a_l) + \pi i \sum_{k=1}^n \text{Res}f(b_k).$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

- 证明: 以 $z_0 = 0$ 为圆心, R 为半径作上半圆 C_R ; 以 b_k 为圆心, ρ 为半径作上半圆 C_k , 且 $R > |b_k|$.



2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

因此,

$$\begin{aligned} & P \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\int_{-R}^{b_1 - \rho} f(x) dx + \int_{b_1 + \rho}^{b_2 - \rho} f(x) dx \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \cdots + \int_{b_n + \rho}^R f(x) dx \right] \right\} \end{aligned}$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

绕开实轴上的单极点，在上半平面的环路积分为：

$$\oint_l f(z)dz = P \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx + \int_{C_R} f(z)dz + \sum_{k=1}^n \int_{C_k} f(z)dz.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

● 当 $R \rightarrow \infty$ 时,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_l f(z) dz = 2\pi i \sum_{l=1}^m \text{Res} f(a_l).$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

- 当 $R \rightarrow \infty$ 时,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \oint_l f(z) dz = 2\pi i \sum_{l=1}^m \text{Res} f(a_l).$$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} f(z) dz = 0.$$

- 在 b_k 邻域, $f(z)$ 的 *Laurent* 级数为:

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - b_k} + P(z).$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

● $P(z)$ 在 b_k 邻域内解析, 有

$$\int_{C_k} \frac{a_{-1}}{z - b_k} dz = -\pi i a_{-1},$$

然而

$$\left| \int_{C_k} P(z) dz \right| \leq \int_{C_k} |P(z)| |dz| \leq \text{Max} |P(z)|_{C_k} \cdot \pi \rho \xrightarrow{\rho \rightarrow 0} 0.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

- 因此, 当 $\rho \rightarrow 0$ 时:

$$\int_{C_k} f(z) dz = -\pi i \operatorname{Res} f(b_k).$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

- 因此, 当 $\rho \rightarrow 0$ 时:

$$\int_{C_k} f(z)dz = -\pi i \operatorname{Res} f(b_k).$$

- 所以,

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{l=1}^{\infty} \operatorname{Res} f(a_l) + \pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(b_k).$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

准类型 III

$$I_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \cos mx dx,$$
$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \sin mx dx.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

要求:

- ① $m > 0$;
- ② $F(x)$ 为偶函数, $G(x)$ 为奇函数;
- ③ $F(z), G(z)$ 在实轴上有 n 个一阶极点, $b_k, k = 1, 2, \dots, n$; 在上半平面有 l 个奇点 $a_{k'}, k' = 1, 2, \dots, l$;
- ④ z 在实轴和上半平面趋于 ∞ 时, $F(z), G(z)$ 一致趋于零.

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

则 I_1 的 *Cauchy* 积分主值为:

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} F(x) \cos mx dx = 2\pi i \sum_{k=1}^l \operatorname{Res} f(a_k) + \pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(b_k),$$

其中, $f(z) = F(z)e^{imz}$.

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

则 I_2 的 *Cauchy* 积分主值为

$$P \int_{-\infty}^{+\infty} G(x) \sin mx dx = 2\pi \sum_{k=1}^l \operatorname{Res} f(a_k) + \pi \sum_{k=1}^n \operatorname{Res} f(b_k),$$

其中, $f(z) = G(z)e^{imz}$.

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

例4

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot 1 = \frac{\pi}{2}.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

类型 V

多值函数的积分

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

类型 V

多值函数的积分

例5

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx, \quad 0 < \alpha < 1.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

类型 V

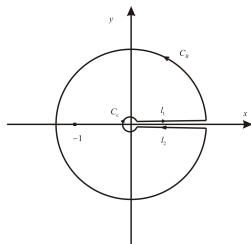
多值函数的积分

例5

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx, \quad 0 < \alpha < 1.$$

● $\frac{x^{\alpha-1}}{1+x}$ 解析延拓 $\rightarrow \frac{z^{\alpha-1}}{1+z}$ 多值函数, 支点为 $0, \infty$.

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分



单值化: 从 0 到 ∞ 作割线. 回路(不能越过割线): $l_1 + C_R + l_2 + C_\varepsilon$. 因此,

$$\oint_l \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz = \left[\int_{l_1} + \int_{C_R} + \int_{l_2} + \int_{C_\varepsilon} \right] \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

● 当 $R \rightarrow \infty$, 且 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned}\oint_l \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z^{\alpha-1}}{1+z} \right) = 2\pi i (-1)^{\alpha-1} \\ &= 2\pi i e^{i\pi(\alpha-1)}.\end{aligned}$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

- 当 $R \rightarrow \infty$, 且 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned}\oint_l \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz &= 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{z^{\alpha-1}}{1+z} \right) = 2\pi i (-1)^{\alpha-1} \\ &= 2\pi i e^{i\pi(\alpha-1)}.\end{aligned}$$

- 分析等式右端的四个积分

$$\lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \int_{l_1} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

$$\begin{aligned}\lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow 0} \int_{l_2} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz &= \int_{+\infty}^0 \frac{(xe^{i2\pi})^{\alpha-1}}{1+x} dx \\ &= -e^{i2\pi\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx.\end{aligned}$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

当 $R \rightarrow \infty$ 时:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_R} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz \right| &\leq \int_{C_R} \left| \frac{z^{\alpha}}{1+z} \right| \left| \frac{dz}{z} \right| \\ &\leq \text{Max} \left| \frac{z^{\alpha}}{1+z} \right|_{C_R} \cdot 2\pi \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时:

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_\varepsilon} \frac{z^{\alpha-1}}{1+z} dz \right| &\leq \int_{C_\varepsilon} \left| \frac{z^\alpha}{1+z} \right| \left| \frac{dz}{z} \right| \\ &\leq \text{Max} \left| \frac{z^\alpha}{1+z} \right|_{C_\varepsilon} \cdot 2\pi \rightarrow 0. \end{aligned}$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

● 所以

$$2\pi i e^{i\pi(\alpha-1)} = (1 - e^{i2\pi\alpha}) \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx.$$

2.1 将定积分变成复变函数的回路积分

● 所以

$$2\pi i e^{i\pi(\alpha-1)} = (1 - e^{i2\pi\alpha}) \int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx.$$

● 即

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha}.$$