

数学物理方法讲义

缪炎刚

南开大学物理科学学院

March 23, 2020

九、方程和定解条件的导出
十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式
十一、直角坐标系中方程的分离变量法
十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法
十三、球函数
第十四章、柱函数

数学物理方程

第III部分、数学物理方程

目录 I

1

九、方程和定解条件的导出

- 1. 方程的一般性介绍
 - 1.1 波动方程(双曲型方程)
 - 1.2 输运方程(抛物型方程)
 - 1.3 Poisson方程(椭圆型方程)
- 2. 三类方程的导出
 - 2.1 波动方程的导出
 - 2.2 输运方程的导出
 - 2.3 Poisson方程的导出
- 3. 定解条件的导出
 - 3.1 边界条件的导出
 - 3.2 初始条件的导出

目录 II

- 3.3 自然边界条件的导出
- 3.4 连结条件的导出
- 4. 定解问题的适定性

2 十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

- 1. 数学物理方程的分类
 - 1.1 二阶线性偏微分方程
 - 1.2 两个自变数的方程的分类
- 2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

3 十一、直角坐标系中方程的分离变量法

- 1. 有界空间的齐次泛定方程(Fourier级数法)
 - 1.1 分离变量法一般介绍

目录 III

- 1.2 两端固定的弦的自由振动
- 2. 无界空间的齐次泛定方程(Fourier积分法)
 - 2.1 无界空间
 - 2.2 半无界空间
 - 2.3 有界空间补充例题
- 3. 补充知识 (有关常微分方程的求解)
 - 3.1 n 阶常系数齐次线性方程
 - 3.2 Euler方程(变系数)

4 十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

- 1. 特殊函数常微分方程的导出
 - 1.1 球、柱坐标系中的Laplace算符

目录 IV

- 1.2 Laplace方程的变数分离
- 1.3 Helmholtz方程的分离变量
- 2. 常点领域的级数解法
- 3. 正则奇点领域上的级数解法
 - 3.1 非整数阶($\nu \neq$ 整数或半奇数)Bessel方程
 - 3.3 整数 m 阶Bessel方程
 - 3.4 虚宗量Bessel方程

5

十三、球函数

- 1. 轴对称球函数
 - 1.1 轴对称球函数的级数表达式
 - 1.2 轴对称球函数的微分式和积分式
 - 1.3 $P_l(x)$ 的正交性、完备性及广义Fourier展开

目录 V

- 1.4 母函数和递推关系
- 2. 一般球函数
 - 2.1 缔合 *Legendre* 多项式
 - 2.2 一般球函数

6

第十四章、柱函数

- 1. 柱函数的来源和分类
 - 1.1 *Laplace* 方程在柱坐标中分离变量
 - 1.2 *Helmholtz* 方程在柱坐标中分离变量
 - 1.3 *Helmholtz* 方程在球坐标中分离变量
 - 1.3 *Helmholtz* 方程在球坐标中分离变量
 - 1.4 *Bessel* 方程的解
- 2. 柱函数的性质

目录 VI

- 2.1 $x \rightarrow 0$ 和 $x \rightarrow \infty$ 时的行为
- 2.2 递推关系
- 2.3 本征值和零点问题
- 2.4 正交性、模、广义 *Fourier* 展开
- 2.5 母函数和积分表达式
- 3. 球 *Bessel* 函数及其性质
 - 3.1 线性独立解
 - 3.2 递推关系
 - 3.3 初等函数表示式
 - 3.4 $x \rightarrow 0$ 和 $x \rightarrow \infty$ 时的行为
- 4. 柱函数应用举例

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

方程和定解条件的导出

第九章、方程和定解条件的导出

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

1. 方程的一般性介绍

- 描述连续体中各个部分的运动, 用偏微分方程.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

1. 方程的一般性介绍

- 描述连续体中各个部分的运动, 用偏微分方程.
- 描述物理规律的偏微分方程叫数学物理方程.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

1. 方程的一般性介绍

- 描述连续体中各个部分的运动, 用偏微分方程.
- 描述物理规律的偏微分方程叫数学物理方程.
- 本课程介绍以下三类方程:

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

1. 方程的一般性介绍

- 描述连续体中各个部分的运动, 用偏微分方程.
- 描述物理规律的偏微分方程叫数学物理方程.
- 本课程介绍以下三类方程:
 - 波动方程(双曲型方程)

1. 方程的一般性介绍

- 描述连续体中各个部分的运动, 用偏微分方程.
- 描述物理规律的偏微分方程叫数学物理方程.
- 本课程介绍以下三类方程:
 - 波动方程(双曲型方程)
 - 输运方程(抛物型方程)

1. 方程的一般性介绍

- 描述连续体中各个部分的运动, 用偏微分方程.
- 描述物理规律的偏微分方程叫数学物理方程.
- 本课程介绍以下三类方程:
 - 波动方程(双曲型方程)
 - 输运方程(抛物型方程)
 - Poisson方程(椭圆型方程)

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

1.1 波动方程(双曲型方程)

一般形式

$$u_{tt} - a^2 \nabla^2 u = f(x, y, z; t). \quad \left(\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right)$$

$$u = u(x, y, z; t).$$

其中 a 表示波的传播速度, $f(x, y, z; t)$ 表示振动的源.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

1.1 波动方程(双曲型方程)

- 特点：方程中不包含 u_t 项, 因此方程所描述的过程是可逆的!

1.1 波动方程(双曲型方程)

- 特点：方程中不包含 u_t 项, 因此方程所描述的过程是可逆的!
- 可逆的数学语言：波动方程在

$$t \rightarrow -t$$

变换下形式保持不变.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

1.2 输运方程(抛物型方程)

一般形式

$$u_t - a^2 \nabla^2 u = f(x, y, z; t)$$

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

1.2 输运方程(抛物型方程)

一般形式

$$u_t - a^2 \nabla^2 u = f(x, y, z; t)$$

- 物理上几种常见的输运过程:

1.2 输运方程(抛物型方程)

一般形式

$$u_t - a^2 \nabla^2 u = f(x, y, z; t)$$

- 物理上几种常见的输运过程:
 - (1) 热传导过程—能量的输运
(u : 温度, a : 温度传导率)

1.2 输运方程(抛物型方程)

一般形式

$$u_t - a^2 \nabla^2 u = f(x, y, z; t)$$

- 物理上几种常见的输运过程:
 - (1) 热传导过程-能量的输运
(u : 温度, a : 温度传导率)
 - (2) (物质)扩散过程-质量的输运
(u : 浓度, a : 扩散系数)

1.2 输运方程(抛物型方程)

一般形式

$$u_t - a^2 \nabla^2 u = f(x, y, z; t)$$

- 物理上几种常见的输运过程:
 - (1) 热传导过程-能量的输运
(u : 温度, a : 温度传导率)
 - (2) (物质)扩散过程-质量的输运
(u : 浓度, a : 扩散系数)
 - (3) 内摩擦现象-定向运动的动量的输运

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

1.2 输运方程(抛物型方程)

- 特点：输运过程是不可逆的！
即, 当 $t \rightarrow -t$ 时, 运动方程的形式改变.

1.2 输运方程(抛物型方程)

- 特点：输运过程是不可逆的！
即，当 $t \rightarrow -t$ 时，运动方程的形式改变.
- 注解：量子力学中的Schrodinger方程不属于输运方程.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U \right) \Psi.$$

左端含有虚单位 i .

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

1.3 Poisson方程(椭圆型方程)

一般形式

$$\nabla^2 u = f(x, y, z)$$

1.3 Poisson方程(椭圆型方程)

一般形式

$$\nabla^2 u = f(x, y, z)$$

齐次形式^a

^aLaplace方程.

$$\nabla^2 u = 0$$

1.3 Poisson方程(椭圆型方程)

一般形式

$$\nabla^2 u = f(x, y, z)$$

齐次形式^a

^aLaplace方程.

$$\nabla^2 u = 0$$

- 特点：与 t 无关.
通常描述温度, 电场的稳定分布.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.1 波动方程的导出

- 波动方程描述的现象(简单归纳):

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.1 波动方程的导出

- 波动方程描述的现象(简单归纳):
 - ①弦的横振动(书 $p.109 - 111$)

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.1 波动方程的导出

- 波动方程描述的现象(简单归纳):
 - ①弦的横振动(书 $p.109 - 111$)
 - ②杆的纵振动(书 $p.111$)

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.1 波动方程的导出

- 波动方程描述的现象(简单归纳):
 - ①弦的横振动(书 $p.109 - 111$)
 - ②杆的纵振动(书 $p.111$)
 - ③传输线方程(电报方程)($p.111 - 113$)

2.1 波动方程的导出

- 波动方程描述的现象(简单归纳):
 - ①弦的横振动(书 $p.109 - 111$)
 - ②杆的纵振动(书 $p.111$)
 - ③传输线方程(电报方程)($p.111 - 113$)
 - ④均匀薄膜的横振动($p.113 - 114$)

2.1 波动方程的导出

- 波动方程描述的现象(简单归纳):
 - ①弦的横振动(书 $p.109 - 111$)
 - ②杆的纵振动(书 $p.111$)
 - ③传输线方程(电报方程)($p.111 - 113$)
 - ④均匀薄膜的横振动($p.113 - 114$)
 - ⑤声学方程($p.114$)

2.1 波动方程的导出

- 波动方程描述的现象(简单归纳):
 - ①弦的横振动(书 $p.109 - 111$)
 - ②杆的纵振动(书 $p.111$)
 - ③传输线方程(电报方程)($p.111 - 113$)
 - ④均匀薄膜的横振动($p.113 - 114$)
 - ⑤声学方程($p.114$)
 - ⑥电磁波方程($p.115$)

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.1 波动方程的导出

例1

杆的纵振动方程的导出.^a

^aRobert Hooke (1639-1703) 英国物理学家, 发明家

主要贡献:

1660年, 胡克(弹性)定律

1664年, 发现猎户座第五星

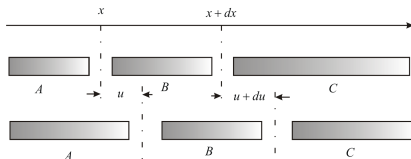
1672年, 发现衍射现象

1678年, 发现行星运动平方反比律

另外, 首先使用“cell”(细胞)一词, 制成反射式望远镜等.

2.1 波动方程的导出

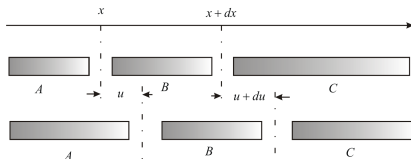
- 如下图, 取杆上一小段 $x \rightarrow x + dx$ (B段) 来研究.



它的运动应满足牛顿第二定律.

2.1 波动方程的导出

- 如下图, 取杆上一小段 $x \rightarrow x + dx$ (B段) 来研究.



它的运动应满足牛顿第二定律.

- 符号含义: $u(x, t)$ 表示 t 时刻, x 端的位移;
 $u(x + dx, t)$ 表示 t 时刻 $x + dx$ 端的位移.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.1 波动方程的导出

● 显然,

$$u(x + dx, t) = u + du.$$

2.1 波动方程的导出

- 显然,

$$u(x + dx, t) = u + du.$$

- 定义B段($x \rightarrow x + dx$)的相对伸长量:

$$\frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{u + du - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = u_x.$$

2.1 波动方程的导出

- 显然,

$$u(x + dx, t) = u + du.$$

- 定义B段($x \rightarrow x + dx$)的相对伸长量:

$$\frac{u(x + dx, t) - u(x, t)}{dx} = \frac{u + du - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} = u_x.$$

- Hooke定律: B两端的张应力(单位横截面积上的相互作用力)分别为 $Yu_x|_x$ 和 $Yu_x|_{x+dx}$, 其中 Y 称为杨氏模量.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.1 波动方程的导出

- 设杆的横截面为 S , 杆的密度为 ρ , 则B段的运动方程为:

$$\rho(Sdx)u_{tt} = YSu_x|_{x+dx} - YSu_x|_x = YS\frac{\partial u_x}{\partial x}dx = YSu_{xx}dx$$

2.1 波动方程的导出

- 设杆的横截面为 S , 杆的密度为 ρ , 则B段的运动方程为:

$$\rho(Sdx)u_{tt} = YSu_x|_{x+dx} - YSu_x|_x = YS\frac{\partial u_x}{\partial x}dx = YSu_{xx}dx$$

- 所以

$$\rho u_{tt} - Y u_{xx} = 0$$

2.1 波动方程的导出

- 设杆的横截面为 S , 杆的密度为 ρ , 则B段的运动方程为:

$$\rho(Sdx)u_{tt} = YSu_x|_{x+dx} - YSu_x|_x = YS\frac{\partial u_x}{\partial x}dx = YSu_{xx}dx$$

- 所以

$$\rho u_{tt} - Y u_{xx} = 0$$

- 这是杆的自由纵振动方程.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.1 波动方程的导出

- 若 ρ , Y 为常数(均匀杆), 则

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, \quad a^2 \equiv Y/\rho.$$

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.1 波动方程的导出

- 若在杆的振动方向上加个外力 $f(x, t)$ (单位面积, 单位长度上的力).

2.1 波动方程的导出

- 若在杆的振动方向上加个外力 $f(x, t)$ (单位面积, 单位长度上的力).
- 则运动方程为:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x, t)$$

这是杆的受迫振动方程.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.1 波动方程的导出

例2

电磁波方程

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.1 波动方程的导出

例2

电磁波方程

- 由Maxwell方程组：

$$\left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{D} = \rho \\ \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \end{array} \right., \quad \left\{ \begin{array}{l} \nabla \cdot \vec{B} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{J} \end{array} \right.$$

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.1 波动方程的导出

- 在真空中, $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$, 且 $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

2.1 波动方程的导出

- 在真空中, $\rho = 0$, $\vec{J} = 0$, 且 $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.
- 所以

$$\begin{cases} \nabla \cdot \vec{E} = 0 \\ \nabla \times \vec{E} = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \end{cases} \quad \begin{cases} \nabla \cdot \vec{H} = 0 \\ \nabla \times \vec{H} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

2.1 波动方程的导出

由第一组第二式, 得

$$\begin{aligned}
 -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} &= \nabla \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \\
 &= \nabla \times \frac{1}{\epsilon_0} (\nabla \times \vec{H}) \quad (\text{利用第二组第二式}) \\
 &= \frac{1}{\epsilon_0} [\nabla(\nabla \cdot \vec{H}) - \nabla^2 \vec{H}] \\
 &= -\frac{1}{\epsilon_0} \nabla^2 \vec{H} \quad (\text{利用第二组第一式})
 \end{aligned}$$

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.1 波动方程的导出

所以

$$\vec{H}_{tt} - \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} \nabla^2 \vec{H} = 0$$

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.1 波动方程的导出

- 考虑到 $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$, 其中 c 是光速,

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.1 波动方程的导出

- 考虑到 $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$, 其中 c 是光速,

- 所以

$$\vec{H}_{tt} - c^2 \nabla^2 \vec{H} = 0,$$

这是真空中电磁波方程.

2.1 波动方程的导出

- 考虑到 $c^2 = \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}$, 其中 c 是光速,

- 所以

$$\vec{H}_{tt} - c^2 \nabla^2 \vec{H} = 0,$$

这是真空中电磁波方程.

- 同理可得:

$$\vec{E}_{tt} - c^2 \nabla^2 \vec{E} = 0.$$

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.2 输运方程的导出

例1

热传导方程^a

^a研究温度在时空中的演化和分布状态

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.2 输运方程的导出

例1

热传导方程^a

^a研究温度在时空中的演化和分布状态

● 热流强度 $\vec{q}$, 量纲 $[q] = \frac{[\text{热量}]}{[\text{面积}][\text{时间}]}$.

2.2 输运方程的导出

例1

热传导方程^a

^a研究温度在时空中的演化和分布状态

● 热流强度 $\vec{q}$, 量纲 $[q] = \frac{[\text{热量}]}{[\text{面积}][\text{时间}]}$.

● Fourier定律:

$\vec{q} = -k\nabla u$, 其中 k 为热传导系数, u 为温度.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

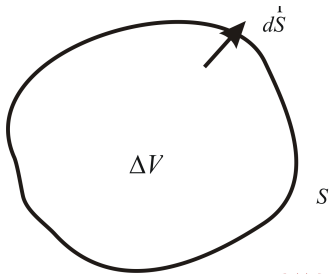
4. 定解问题的适定性

2.2 输运方程的导出

- 下面由 $Fourier$ 定律和热量守恒定律推导热传导方程.

2.2 输运方程的导出

- 下面由 $Fourier$ 定律和热量守恒定律推导热传导方程.
- Δv 中的物质: 比热为 c ; 质量密度为 ρ ; 可能存在热源为 $F(x, y, z)$.



2.2 输运方程的导出

根据热量守恒定律得:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Delta v} \rho c u dv = \oiint_S -\vec{q} \cdot d\vec{S} + \iiint_{\Delta v} F(x, y, z) dv.$$

上式左边项表示单位时间内 Δv 中热量的增加,
右边第一项为单位时间通过表面 S 流入的热量,
右边第二项表示单位时间在 Δv 中由热源函数产生的热量.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.2 输运方程的导出

- 假定 k (热传导系数)是常数, 即均匀物质, 且 ρ, c 不随时间改变, 则上式简化为

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u + F,$$

2.2 输运方程的导出

- 假定 k (热传导系数)是常数, 即均匀物质, 且 ρ, c 不随时间改变, 则上式简化为

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u + F,$$

- 即

$$u_t - a^2 \nabla^2 u = f,$$

2.2 输运方程的导出

- 假定 k (热传导系数)是常数, 即均匀物质, 且 ρ, c 不随时间改变, 则上式简化为

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla^2 u + F,$$

- 即

$$u_t - a^2 \nabla^2 u = f,$$

- 其中

$$a^2 \equiv k/(\rho c), \quad f \equiv F/(\rho c).$$

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.2 输运方程的导出

例2

扩散方程^a

^a研究浓度在时空中的演化和分布情况

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.2 输运方程的导出

例2

扩散方程^a

^a研究浓度在时空中的演化和分布情况

● 几个相关物理量与关系:

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.2 输运方程的导出

例2

扩散方程^a

^a研究浓度在时空中的演化和分布情况

- 几个相关物理量与关系:

- 扩散流强度 $\vec{q}$, 量纲为 $[q] = \frac{[\text{质量}]}{[\text{面积}][\text{时间}]}$.

2.2 输运方程的导出

例2

扩散方程^a

^a研究浓度在时空中的演化和分布情况

● 几个相关物理量与关系:

- 扩散流强度 $\vec{q}$, 量纲为 $[q] = \frac{[\text{质量}]}{[\text{面积}][\text{时间}]}$.
- 扩散定律: $\vec{q} = -D\nabla u$.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

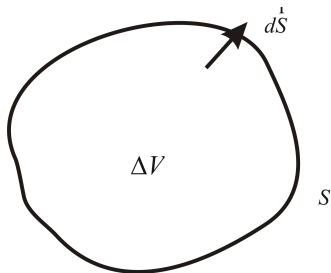
2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.2 输运方程的导出

D 为扩散系数, u 为浓度.
守恒定律图示



2.2 输运方程的导出

- 由质量守恒定律得:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Delta v} u dv = \oiint_S -\vec{q} \cdot d\vec{S} + \iiint_{\Delta v} F dv.$$

上式左边项为单位时间内 Δv 中质量的增加, 右边第一项为单位时间通过表面 S 流入的物质质量, 右边第二项为单位时间内在 Δv 中由物质源函数产生的物质质量.

2.2 输运方程的导出

- 由质量守恒定律得:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{\Delta v} u dv = \oiint_S -\vec{q} \cdot d\vec{S} + \iiint_{\Delta v} F dv.$$

上式左边项为单位时间内 Δv 中质量的增加, 右边第一项为单位时间通过表面 S 流入的物质质量, 右边第二项为单位时间内在 Δv 中由物质源函数产生的物质质量.

- 上式方程可化为:

$$u_t - D\nabla^2 u = F.$$

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.3 Poisson方程的导出

- Simeon Denis Poisson (1781-1840) 法国数学家

2.3 Poisson方程的导出

- Simeon Denis Poisson (1781-1840) 法国数学家
- 主要贡献:
定积分, 电磁理论和概率论等方面;
概率论中的Poisson分布(1837)

2.3 Poisson方程的导出

- Simeon Denis Poisson (1781-1840) 法国数学家
- 主要贡献:
定积分, 电磁理论和概率论等方面;
概率论中的Poisson分布(1837)
- 主要著作:
《力学专论》、《热的数学理论》等.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.3 Poisson方程的导出

$$\begin{cases} \text{波动方程} \\ \text{输运方程} \end{cases} \xrightarrow{\text{当 } \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \text{ 时}} \text{Poisson方程.}$$

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.3 Poisson方程的导出

例1

静电场, 稳恒电流场, 稳恒磁场

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.3 Poisson方程的导出

例1

静电场, 稳恒电流场, 稳恒磁场

● 静电场: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \nabla \times \vec{E} = 0.$

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.3 Poisson方程的导出

例1

静电场, 稳恒电流场, 稳恒磁场

- 静电场: $\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \nabla \times \vec{E} = 0.$
- 引入电势 ϕ , $\vec{E} = -\nabla\phi$, 则

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\varepsilon} \quad (\vec{D} = \varepsilon \vec{E}).$$

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.3 Poisson方程的导出

- 稳恒电流场: $\nabla \cdot \vec{j} = 0$, $\nabla \times \vec{E} = 0$, 且 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.

¹参见书p.119-120.

2.3 Poisson方程的导出

- 稳恒电流场: $\nabla \cdot \vec{j} = 0$, $\nabla \times \vec{E} = 0$, 且 $\vec{j} = \sigma \vec{E}$.
- 引入电势 ϕ , $\vec{E} = -\nabla \phi$, 则¹

$$\nabla^2 \phi = 0$$

此为Laplace方程, 或 ϕ 为调和函数.

¹参见书p.119-120.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.3 Poisson方程的导出

● 稳恒磁场:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{j}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}.$$

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.3 Poisson方程的导出

- 稳恒磁场:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{j}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}.$$

- (1) 当 $\vec{j} = 0$ 时, $\nabla \times \vec{H} = 0$

2.3 Poisson方程的导出

- 稳恒磁场:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{H} = \vec{j}, \quad \vec{B} = \mu \vec{H}.$$

- (1) 当 $\vec{j} = 0$ 时, $\nabla \times \vec{H} = 0$
- 引入磁标势 ϕ_m , 使得 $\vec{H} = -\nabla \phi_m$, 则

$$\nabla^2 \phi_m = 0.$$

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.3 Poisson方程的导出

- (2) 因为 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

$^2\vec{A}$ 可相差一个梯度项, $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla\Lambda$, 则 $\vec{B}$ 不变.

◀ ◻ ▶ ◀ ◻ ▶ ◀ ≡ ▶ ◀ ≡ ▶ ≡ ↺ ↻

2.3 Poisson方程的导出

- (2) 因为 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
 - 引入矢势 $\vec{A}$, 使得²

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

² $\vec{A}$ 可相差一个梯度项, $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla \Lambda$, 则 $\vec{B}$ 不变.

2.3 Poisson方程的导出

- (2) 因为 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$
 - 引入矢势 $\vec{A}$, 使得²

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

- 则

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \vec{B} = \vec{j}, \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu \vec{j}$$

² $\vec{A}$ 可相差一个梯度项, $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla \Lambda$, 则 $\vec{B}$ 不变.

2.3 Poisson方程的导出

- (2) 因为 $\nabla \cdot \vec{B} = 0$

- 引入矢势 $\vec{A}$, 使得²

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$$

- 则

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} \vec{B} = \vec{j}, \quad \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \mu \vec{j}$$

- 即

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = \mu \vec{j}.$$

² $\vec{A}$ 可相差一个梯度项, $\vec{A} \rightarrow \vec{A} + \nabla \Lambda$, 则 $\vec{B}$ 不变.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.3 Poisson方程的导出

- 选取Coulomb规范 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, 则

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{j}$$

2.3 Poisson方程的导出

- 选取Coulomb规范 $\nabla \cdot \vec{A} = 0$, 则

$$\nabla^2 \vec{A} = -\mu \vec{j}$$

- 这是矢量形式的Poisson方程.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.3 Poisson方程的导出

例2

不可压缩流体的无源、无旋、稳定流动

³即 ρ 不随空间坐标而变化.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.3 Poisson方程的导出

例2

不可压缩流体的无源、无旋、稳定流动

● 无源的连续性方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$$

³即 ρ 不随空间坐标而变化.

2.3 Poisson方程的导出

例2

不可压缩流体的无源、无旋、稳定流动

- 无源的连续性方程：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0.$$

- 不可压缩： ρ 与压强无关³

³即 ρ 不随空间坐标而变化.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.3 Poisson方程的导出

● 稳定:⁴

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

⁴ ρ 不随时间变化.

2.3 Poisson方程的导出

- 稳定:⁴

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0.$$

- 所以

$$\rho \nabla \cdot \vec{v} = 0.$$

⁴ ρ 不随时间变化.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

2.3 Poisson方程的导出

- 无旋的条件： $\nabla \times \vec{v} = 0$.

2.3 Poisson方程的导出

- 无旋的条件: $\nabla \times \vec{v} = 0$.
- 因此可以引入势函数 u ,

$$\vec{v} = -\nabla u$$

2.3 Poisson方程的导出

- 无旋的条件: $\nabla \times \vec{v} = 0$.
- 因此可以引入势函数 u ,

$$\vec{v} = -\nabla u$$

- 所以

$$\nabla^2 u = 0$$

此为Laplace方程.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

3. 定解条件的导出

- 泛定方程：描写普遍规律的方程.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

3. 定解条件的导出

- 泛定方程：描写普遍规律的方程.
- 定解条件：决定特解的具体条件.

3. 定解条件的导出

- 泛定方程：描写普遍规律的方程.
- 定解条件：决定特解的具体条件.
- 定解问题 {

泛定方程
 定解条件 {

边界条件(含连结条件)
 初始条件

3.1 边界条件的导出

- 三类线性边界条件
(符号: Σ 表示边界, M 表示 Σ 上的点)

3.1 边界条件的导出

- 三类线性边界条件
(符号: Σ 表示边界, M 表示 Σ 上的点)
- 第一类: $u|_{\Sigma}$ 已知

3.1 边界条件的导出

- 三类线性边界条件
(符号: Σ 表示边界, M 表示 Σ 上的点)
- 第一类: $u|_{\Sigma}$ 已知
- 第二类: $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma}$ 已知($\vec{n}$ 表示边界面的法线方向)

3.1 边界条件的导出

- 三类线性边界条件
(符号: Σ 表示边界, M 表示 Σ 上的点)
- 第一类: $u|_{\Sigma}$ 已知
- 第二类: $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma}$ 已知($\vec{n}$ 表示边界面的法线方向)
- 第三类: $(Hu_n + u)|_{\Sigma}$ 已知(H 为常数)

3.1 边界条件的导出

- 三类线性边界条件
(符号: Σ 表示边界, M 表示 Σ 上的点)
- 第一类: $u|_{\Sigma}$ 已知
- 第二类: $\frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma}$ 已知($\vec{n}$ 表示边界面的法线方向)
- 第三类: $(Hu_n + u)|_{\Sigma}$ 已知(H 为常数)
- 注: 第三类实质上是第一类和第二类的线性叠加(组合).

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

3.1 边界条件的导出

例1

杆的纵振动

3.1 边界条件的导出

例1

杆的纵振动

- 情形(i): $x = 0$ 点固定, 即 $u(0, t) = 0$. $x = l$ 点按已知规律 $f(t)$ 振动, 则

$$u(l, t) = f(t).$$

这是非齐次第一类边界条件.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

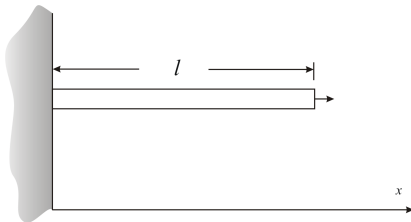
2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

3.1 边界条件的导出

- 特点： $x = 0$, $x = l$ 两端均为第一类边界条件.



九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

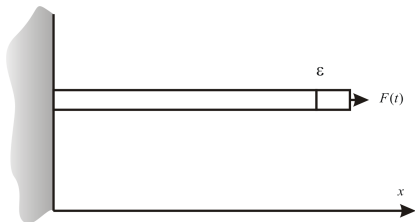
2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

3.1 边界条件的导出

情形(ii): $x = 0$ 点固定, 即 $u(0, t) = 0$. $x = l$ 点受已知力 $F(t)$ 作用.



3.1 边界条件的导出

- 考虑小段 ε 的动力学行为:

$$\rho \varepsilon S u_{tt} = F(t) - YS \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{l-\varepsilon}.$$

⁵非齐次第二类边界条件.

3.1 边界条件的导出

- 考虑小段 ε 的动力学行为:

$$\rho \varepsilon S u_{tt} = F(t) - YS \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{l-\varepsilon}.$$

- 当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, 得到边界条件:⁵

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = \frac{F(t)}{YS}.$$

⁵非齐次第二类边界条件.

3.1 边界条件的导出

- 特殊情况： $x = l$ 端自由，即 $F(t) = 0$ ，则有⁶

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$$

⁶齐次第二类边界条件.

3.1 边界条件的导出

- 特殊情况： $x = l$ 端自由，即 $F(t) = 0$ ，则有⁶

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = 0$$

- 特点： $x = 0$ 点为第一类边界条件； $x = l$ 点为第二类边界条件.

⁶齐次第二类边界条件.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

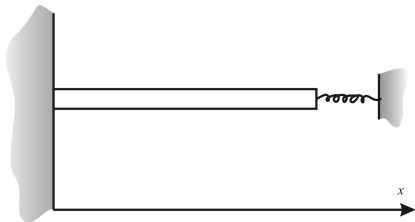
1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

3.1 边界条件的导出



情形(iii): $x = 0$ 点固定, $u(0, t) = 0$, $x = l$ 点受力 $F(t) = -ku(l, t)$.

3.1 边界条件的导出

- 则利用情形(ii)知,

$$YS \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -ku(l, t)$$

⁷齐次第三类边界条件.

3.1 边界条件的导出

- 则利用情形(ii)知,

$$YS \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l} = -ku(l, t)$$

- 所以⁷

$$u(l, t) + Hu_x(l, t) = 0, \quad H \equiv YS/k.$$

⁷齐次第三类边界条件.

3.1 边界条件的导出

- 若 $F(t) = -ku(l, t) + u_0(t)$.
则 $x = l$ 端边界条件为:⁸

$$u(l, t) + Hu_x(l, t) = u_0(t)/k.$$



⁸非齐次第三类边界条件.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

3.1 边界条件的导出

- 特点： $x = 0$ 端第一类边界条件； $x = l$ 端第三类边界条件.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

3.1 边界条件的导出

例2

热传导问题

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

3.1 边界条件的导出

例2

热传导问题

- 情形(i): 边界上温度已知, 即

$$u|_{\Sigma} = f(M, t), \quad M \in \Sigma. \quad \text{第一类}$$

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

3.1 边界条件的导出

- 情形(ii): 边界上流入或出的热流强度已知.

3.1 边界条件的导出

- 情形(ii): 边界上流入或出的热流强度已知.
- 流出:

$$\vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Sigma} = g(M, t), \quad M \in \Sigma.$$

3.1 边界条件的导出

- 情形(ii): 边界上流入或出的热流强度已知.
- 流出:

$$\vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Sigma} = g(M, t), \quad M \in \Sigma.$$

- 即

$$-k \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma} = g(M, t); \quad \text{第二类}$$

3.1 边界条件的导出

- 情形(ii): 边界上流入或出的热流强度已知.
- 流出:

$$\vec{q} \cdot \vec{n}|_{\Sigma} = g(M, t), \quad M \in \Sigma.$$

- 即

$$-k \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma} = g(M, t); \quad \text{第二类}$$

- 流入:

$$k \frac{\partial u}{\partial n}|_{\Sigma} = g(M, t). \quad \text{第二类}$$

3.1 边界条件的导出

- 情形(iii): 物体表面温度和外界温度(恒定) u_0 相差不大, 物体自由冷却或说按牛顿冷却定律与外界交换热量, 则

$$-k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = h[u|_{\Sigma} - u_0].$$

3.1 边界条件的导出

- 情形(iii): 物体表面温度和外界温度(恒定) u_0 相差不大, 物体自由冷却或说按牛顿冷却定律与外界交换热量, 则

$$-k \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = h[u|_{\Sigma} - u_0].$$

- 即

$$\left[u + H \frac{\partial u}{\partial n} \right] \Big|_{\Sigma} = u_0, \quad H = k/h. \quad \text{第三类}$$

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

3.1 边界条件的导出

例3

静电场问题

⁹第一类.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

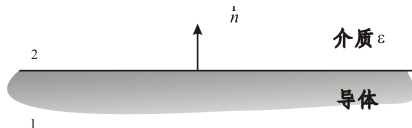
4. 定解问题的适定性

3.1 边界条件的导出

例3

静电场问题

- 情形(i): 边界上电势已知, 即 $u|_{\Sigma}$ 已知.⁹



⁹第一类.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

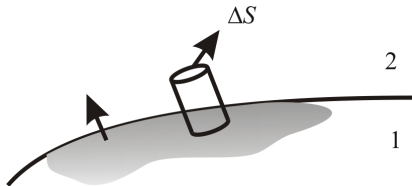
2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

3.1 边界条件的导出

- 情形(ii): 如图. 区域1为导体, 区域2为介质, 介电常数 ε .



3.1 边界条件的导出

显然, 在导体内 $\vec{E}_1 = 0$, 也即 $\vec{D}_1 = 0$.

由 $\nabla \cdot \vec{D} = \rho$, 选横跨边界的无穷小圆柱体, 则

$$\text{左端} = \iiint \nabla \cdot \vec{D} dv = \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_{\Sigma} \Delta S$$

注: 当柱高 $h \rightarrow 0$ 时, 侧面上的 $\vec{D}$ 与 $\vec{n}$ 垂直, 故对积分无贡献!

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

3.1 边界条件的导出



$$\text{右端} = \iiint \rho dv = \sigma \Delta S$$

其中 σ 为面电荷密度.

3.1 边界条件的导出

●

$$\text{右端} = \iiint \rho dv = \sigma \Delta S$$

其中 σ 为面电荷密度.

● 所以

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \Big|_{\Sigma} = \sigma.$$

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

3.1 边界条件的导出

● 又因为

$$\vec{D}_1 = 0, \quad \vec{D}_2 = \varepsilon \vec{E}_2 = -\varepsilon \nabla u,$$

3.1 边界条件的导出

- 又因为

$$\vec{D}_1 = 0, \quad \vec{D}_2 = \varepsilon \vec{E}_2 = -\varepsilon \nabla u,$$

- 所以

$$-\varepsilon \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\Sigma} = \sigma.$$

3.1 边界条件的导出

● 归纳边界条件的若干特点:

- ★ (i) 边界条件的形式多种多样;
- ★ (ii) 导出边界条件的依据与导出方程的依据相同;
- ★ (iii) 无边界条件的问题(边界的影响未到达区域.)
 - { 空间上的远离(区域远离边界)
 - { 时间上不长(距初始时刻)

3.2 初始条件的导出

- 波动方程 $u_{tt} - a^2 \nabla^2 u = 0$, 需要两个初值条件:

$$u(\vec{r}, 0) \text{ 和 } u_t(\vec{r}, 0);$$

3.2 初始条件的导出

- 波动方程 $u_{tt} - a^2 \nabla^2 u = 0$, 需要两个初值条件:

$$u(\vec{r}, 0) \text{ 和 } u_t(\vec{r}, 0);$$

- 输运方程 $u_t - a^2 \nabla^2 u = 0$ 只需一个初始条件:

$$u(\vec{r}, 0).$$

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

3.2 初始条件的导出

● 说明:

3.2 初始条件的导出

- 说明:
- (i) 初始条件必须给出系统各个点的初始状态,不能仅仅给出个别点的初始状态;

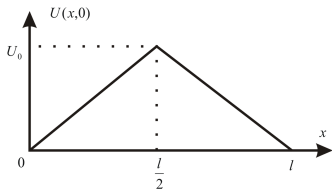
3.2 初始条件的导出

- 说明:
- (i) 初始条件必须给出系统各个点的初始状态,不能仅仅给出个别点的初始状态;
- (ii) 没有初值的问题:
 - (1) 初始条件对问题的解没有影响;
 - (2) 长时间演化趋于稳定的问题(如阻尼振动).

3.2 初始条件的导出

例1 如图, 轻绳的横振动

$$u(x, 0) = \begin{cases} \frac{2u_0}{l}x, & 0 \leq x \leq \frac{l}{2}, \\ \frac{2u_0}{l}(l-x), & \frac{l}{2} \leq x \leq l. \end{cases}$$



3.2 初始条件的导出

注: $u(x, 0) = u_0$ 是错误的, 它仅仅是 $x = \frac{l}{2}$ 点的初始位置, 不是整根弦的初始条件.

$$u_t(x, 0) = 0.$$

此条件表示: 轻轻放开, 每点的初速度为零.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

3.3 自然边界条件的导出

- 基于物理上的考虑, 对某些特殊点的函数值附加有界和单值的要求.

3.3 自然边界条件的导出

- 基于物理上的考虑, 对某些特殊点的函数值附加有界和单值的要求.

例2

球坐标系中, (r, θ, ψ) 与 $(r, \theta, \psi + 2\pi)$ 在空间上是同一点. 若 $u(r, \theta, \psi)$ 是可观测量, 则要求^a

$$u(r, \theta, \psi) = u(r, \theta, \psi + 2\pi).$$

^a单值性要求, 也称周期性边界条件.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

4.4 连结条件的导出

研究区域由不同介质组成, 不同区域中方程式不同. 通过物理上的考虑, 找到不同区域物理量之间的联系.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

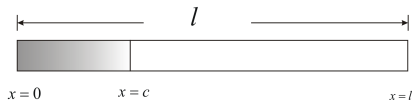
4. 定解问题的适定性

3.4 连结条件的导出

例1 两种材料组成的杆的纵振动问题.

材料1: $0 \leq x < c$, Y_1 , ρ_1 , u_1 .

材料2: $c < x \leq l$, Y_2 , ρ_2 , u_2 .



九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

3.4 连结条件的导出

- 各自运动方程分别为:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, \quad a_1^2 = Y_1/\rho_1.$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0, \quad a_2^2 = Y_2/\rho_2.$$

3.4 连结条件的导出

- 各自运动方程分别为:

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} - a_1^2 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = 0, \quad a_1^2 = Y_1/\rho_1.$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} - a_2^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = 0, \quad a_2^2 = Y_2/\rho_2.$$

- 连结条件(保证连结处不断开!):

$$\begin{cases} u_1|_{x=c} = u_2|_{x=c} \\ Y_1 S \frac{\partial u_1}{\partial x} \Big|_{x=c} = Y_2 S \frac{\partial u_2}{\partial x} \Big|_{x=c} \end{cases}$$

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

4. 定解问题的适定性

- 关注三个方面:

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 方程的一般性介绍

2. 三类方程的导出

3. 定解条件的导出

4. 定解问题的适定性

4. 定解问题的适定性

● 关注三个方面:



解的存在性问题
解的唯一性问题
解的稳定性问题

} 数学家更关注.

九、方程和定解条件的导出
十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式
十一、直角坐标系中方程的分离变量法
十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法
十三、球函数
第十四章、柱函数

1. 数学物理方程的分类
2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

第十章、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

1. 数学物理方程的分类

● 二阶线性偏微分方程的一般性讨论.

1. 数学物理方程的分类

- 二阶线性偏微分方程的一般性讨论.
- 本课程介绍的三类方程是二阶线性偏微分方程的三种特定形式.

1.1 二阶线性偏微分方程

一般形式(最普遍的形式):

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu + f = 0,$$

其中 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 是 n 个自变量,

$u = u(x_1, x_2, \dots, x_n)$;

a_{ij}, b_i, c, f 均为 n 个自变量 x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) 的已知函数.

1.1 二阶线性偏微分方程

★ 几个概念：

- (i) 线性方程：关于 u , $u_{x_i} \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{x_i x_j} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ 均是一次幂.

1.1 二阶线性偏微分方程

★ 几个概念：

- (i) 线性方程：关于 u , $u_{x_i} \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{x_i x_j} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ 均是一次幂.

1.1 二阶线性偏微分方程

★ 几个概念：

- (i) 线性方程：关于 u , $u_{x_i} \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{x_i x_j} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ 均是一次幂.
- (ii) 齐次方程

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0.$$

1.1 二阶线性偏微分方程

★ 几个概念：

- (i) 线性方程：关于 u , $u_{x_i} \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{x_i x_j} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ 均是一次幂.
- (ii) 齐次方程

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0.$$

1.1 二阶线性偏微分方程

★ 几个概念：

- (i) 线性方程：关于 u , $u_{x_i} \equiv \frac{\partial u}{\partial x_i}$, $u_{x_i x_j} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ 均是一次幂.
- (ii) 齐次方程

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0.$$

- (iii) 非齐次方程

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \neq 0.$$

1.1 二阶线性偏微分方程

- 齐次线性方程的重要性质：解的叠加性(叠加原理).

1.1 二阶线性偏微分方程

- 齐次线性方程的重要性质：解的叠加性(叠加原理).
- 叠加原理：若 u 是齐次方程的解，即 u 满足

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i u_{x_i} + cu = 0,$$

而 v 也是该齐次方程的解，即 v 满足

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij} v_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^n b_i v_{x_i} + cv = 0,$$

1.1 二阶线性偏微分方程

则 u 与 v 的线性组合(叠加) $c_1u + c_2v$ 也是上述方程的解, 即存在

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}(c_1u_{x_ix_j} + c_2v_{x_ix_j}) + \sum_{i=1}^n b_i(c_1u_{x_i} + c_2v_{x_i}) + c(c_1u + c_2v) = 0,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

1.1 二阶线性偏微分方程

例 Schrodinger方程是线性的

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U\right) \psi,$$

其中 ψ 描述系统的状态, 称为波函数.

¹⁰波函数的几率解释.

1.1 二阶线性偏微分方程

例 Schrodinger方程是线性的

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U\right) \psi,$$

其中 ψ 描述系统的状态, 称为波函数.

- 所以存在相应的态的叠加原理.¹⁰ 因此, 波函数的几率解释的数学基础是方程的线性特征.

¹⁰波函数的几率解释.

1.2 两个自变数的方程的分类

一般形式:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0,$$

¹¹关于 x, y 的已知函数.

1.2 两个自变数的方程的分类

一般形式:

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu + f = 0,$$

● 其中¹¹

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{11} = a_{11}(x, y), \quad b_1 = b_1(x, y), \\ a_{12} = a_{12}(x, y), \quad b_2 = b_2(x, y), \\ a_{22} = a_{22}(x, y), \quad c = c(x, y), \\ \quad \quad \quad f = f(x, y). \end{array} \right.$$

¹¹关于 x, y 的已知函数.

1.2 两个自变数的方程的分类

- 引入两个新的自变量 ξ, η , 作如下的变换:

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}$$

1.2 两个自变数的方程的分类

- 引入两个新的自变量 ξ, η , 作如下的变换:

$$\begin{cases} x = x(\xi, \eta) \\ y = y(\xi, \eta) \end{cases}$$

- 要求其逆变换存在, 即有

$$\begin{cases} \xi = \xi(x, y) \\ \eta = \eta(x, y) \end{cases}$$

1.2 两个自变数的方程的分类

- 这个条件等价于变换的Jacobian不为零, 即

$$\left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right| \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0$$

1.2 两个自变数的方程的分类

● 证明:

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy, \quad d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy,$$

1.2 两个自变数的方程的分类

● 证明:

$$d\xi = \frac{\partial \xi}{\partial x} dx + \frac{\partial \xi}{\partial y} dy, \quad d\eta = \frac{\partial \eta}{\partial x} dx + \frac{\partial \eta}{\partial y} dy,$$

● 写成矩阵形式

$$\begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$$

1.2 两个自变数的方程的分类

● 令 $Y \equiv \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$, $X \equiv \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$, $C \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix}$,

1.2 两个自变数的方程的分类

- 令 $Y \equiv \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$, $X \equiv \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$, $C \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix}$,
- 则 $Y = CX$.

1.2 两个自变数的方程的分类

- 令 $Y \equiv \begin{pmatrix} d\xi \\ d\eta \end{pmatrix}$, $X \equiv \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}$, $C \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{pmatrix}$,
- 则 $Y = CX$.
- 因为 $X = C^{-1}Y$ 存在, 所以 $\det C \neq 0$.

1.2 两个自变数的方程的分类

- 下面以 ξ, η 为自变量, 写出方程的一般形式.

1.2 两个自变数的方程的分类

- 下面以 ξ, η 为自变量, 写出方程的一般形式.
- 主要计算工作:
将 $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_x, u_y$ 变换成 $u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}, u_\xi, u_\eta$
和 ξ, η 表示的形式.

1.2 两个自变数的方程的分类

- 下面以 ξ, η 为自变量, 写出方程的一般形式.
- 主要计算工作:
将 $u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}, u_x, u_y$ 变换成 $u_{\xi\xi}, u_{\xi\eta}, u_{\eta\eta}, u_\xi, u_\eta$ 和 ξ, η 表示的形式.
- 因为计算二阶微商有相似性, 所以以 u_{xx} 为例!

1.2 两个自变数的方程的分类

$$u(x, y) = u(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)), \quad u(\xi, \eta) = u(\xi(x, y), \eta(x, y)),$$

$$u_x \equiv \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x,$$

$$u_y \equiv \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y,$$

1.2 两个自变数的方程的分类

$$\begin{aligned}u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x}(u_{\xi}\xi_x + u_{\eta}\eta_x) \\&= \frac{\partial}{\partial x}u_{\xi} \cdot \xi_x + u_{\xi}\xi_{xx} + \frac{\partial}{\partial x}u_{\eta} \cdot \eta_x + u_{\eta}\eta_{xx} \\&= (u_{\xi\xi}\xi_x + u_{\xi\eta}\eta_x) \cdot \xi_x + u_{\xi}\xi_{xx} \\&\quad + (u_{\eta\eta}\eta_x + u_{\eta\xi}\xi_x) \cdot \eta_x + u_{\eta}\eta_{xx} \\&= u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_{\xi}\xi_{xx} + u_{\eta}\eta_{xx}.\end{aligned}$$

1.2 两个自变数的方程的分类

- 同理可算出 u_{xy}, u_{yy} ,¹²代入原来的一般形式的方程中,

$$A_{11}u_{\xi\xi}+2A_{12}u_{\xi\eta}+A_{22}u_{\eta\eta}+B_1u_{\xi}+B_2u_{\eta}+Cu+F=0.$$

¹² 见书p.129.

1.2 两个自变数的方程的分类

- 同理可算出 u_{xy}, u_{yy} ,¹²代入原来的一般形式的方程中,

$$A_{11}u_{\xi\xi}+2A_{12}u_{\xi\eta}+A_{22}u_{\eta\eta}+B_1u_{\xi}+B_2u_{\eta}+Cu+F=0.$$

- 注：新系数均可表示为 ξ, η 的已知函数.

¹²见书p.129.

1.2 两个自变数的方程的分类

● 其中

$$\begin{cases} A_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \\ A_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2, \\ A_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y, \\ B_1 = a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\xi_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y, \\ B_2 = a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta_{xy} + a_{22}\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y, \\ C = c, \\ F = f. \end{cases}$$

1.2 两个自变数的方程的分类

● 其中

$$\begin{cases} A_{11} = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \\ A_{22} = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2, \\ A_{12} = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y, \\ B_1 = a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\xi_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y, \\ B_2 = a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta_{xy} + a_{22}\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y, \\ C = c, \\ F = f. \end{cases}$$

● 变换的特点：方程的线性性质不变！

1.2 两个自变数的方程的分类

- 下面的工作是化简一般方程.¹³

¹³化简原则：保持二阶方程的性质，并有尽可能多的系数函数为零.

1.2 两个自变数的方程的分类

- 下面的工作是化简一般方程.¹³
- 方法是：选取特殊的变换

$$\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y),$$

使得

$$A_{11} = A_{22} = 0.$$

¹³化简原则：保持二阶方程的性质，并有尽可能多的系数函数为零.

1.2 两个自变数的方程的分类

● 设¹⁴

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0.$$

¹⁴关于 $z(x, y)$ 的非线性偏微分方程!

1.2 两个自变数的方程的分类

- 设¹⁴

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0.$$

- 下面证明：此非线性方程有两个特解，分别被选为 ξ, η ，则必然保证

$$A_{11} = A_{22} = 0.$$

¹⁴关于 $z(x, y)$ 的非线性偏微分方程！

1.2 两个自变数的方程的分类

● 变形方程:

$$a_{11}\left(-\frac{z_x}{z_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{z_x}{z_y}\right) + a_{22} = 0.$$

1.2 两个自变数的方程的分类

- 变形方程:

$$a_{11}\left(-\frac{z_x}{z_y}\right)^2 - 2a_{12}\left(-\frac{z_x}{z_y}\right) + a_{22} = 0.$$

- 进一步将

$$z(x, y) = \text{const.}$$

作为定义隐函数 $y(x)$ 的方程, 则

$$dz = 0 = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy = z_x dx + z_y dy,$$

1.2 两个自变数的方程的分类

● 即

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{z_x}{z_y}.$$

¹⁵这是非线性常微分方程, 称为原来 $u(x, y)$ 方程的特征方程.

1.2 两个自变数的方程的分类

● 即

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{z_x}{z_y}.$$

● 因此, $z(x, y)$ 的非线性偏微分方程化简为非线性常微分方程¹⁵

$$a_{11}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 2a_{12}\frac{dy}{dx} + a_{22} = 0.$$

¹⁵ 这是非线性常微分方程, 称为原来 $u(x, y)$ 方程的特征方程.

1.2 两个自变数的方程的分类

- 特征方程可分解为两个¹⁶

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} + \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}},$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_{12} - \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}.$$

¹⁶即两个解类, 分别对应于 ξ 和 η .

1.2 两个自变数的方程的分类

- 由 $\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}$ 的正, 负或零的情形, 将偏微分方程分类:

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0, \quad \text{双曲型}$$

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0, \quad \text{抛物型}$$

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0, \quad \text{椭圆型}$$

1.2 两个自变数的方程的分类

- 由 $\sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}$ 的正, 负或零的情形, 将偏微分方程分类:

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0, \quad \text{双曲型}$$

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0, \quad \text{抛物型}$$

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0, \quad \text{椭圆型}$$

- 注: 由于 a_{11}, a_{12}, a_{22} 是 x, y 的函数. 因此, 对普遍方程而言, 在 x, y 的不同区域, 它对应于不同类型的方程.

1.2 两个自变数的方程的分类

变换的性质:

可以证明

$$A_{12}^2 - A_{11}A_{22} = (a_{12}^2 - a_{11}a_{22})(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x)^2.$$

所以, 自变量的变换不改变方程的类型!

注: $\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x \neq 0$, 它恰好是 $\left| \frac{\partial(\xi, \eta)}{\partial(x, y)} \right|$, 即它是变换的Jacobi行列式.

1.2 两个自变数的方程的分类

下面讨论两种情况:

(1) 双曲型方程

- 由特征方程解出实的特征线:

$$\begin{cases} \xi(x, y) = \text{常数}, \\ \eta(x, y) = \text{常数}. \end{cases}$$

1.2 两个自变数的方程的分类

下面讨论两种情况:

(1) 双曲型方程

- 由特征方程解出实的特征线:

$$\begin{cases} \xi(x, y) = \text{常数}, \\ \eta(x, y) = \text{常数}. \end{cases}$$

1.2 两个自变数的方程的分类

下面讨论两种情况:

(1) 双曲型方程

- 由特征方程解出实的特征线:

$$\begin{cases} \xi(x, y) = \text{常数}, \\ \eta(x, y) = \text{常数}. \end{cases}$$

- 取 ξ, η 为新的自变量, 则 $A_{11} = A_{22} = 0$, 即, 一般形式方程化简为

$$u_{\xi\eta} = -\frac{1}{2A_{12}}(B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + Cu + F).$$

1.2 两个自变数的方程的分类

- 为了约化成标准的双曲型方程, 引入 α, β 代替 ξ, η , 它们之间的联系是:

$$\begin{cases} \xi \equiv \alpha + \beta \\ \eta \equiv \alpha - \beta \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \\ \beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta) \end{cases}$$

¹⁷这是标准的双曲型方程.

1.2 两个自变数的方程的分类

- 为了约化成标准的双曲型方程, 引入 α, β 代替 ξ, η , 它们之间的联系是:

$$\begin{cases} \xi \equiv \alpha + \beta \\ \eta \equiv \alpha - \beta \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \\ \beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta) \end{cases}$$

- 利用 α, β 为自变量, 则上述方程化为¹⁷

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = -\frac{1}{A_{12}}[(B_1 + B_2)u_{\alpha} + (B_1 - B_2)u_{\beta} + 2Cu + 2F].$$

¹⁷这是标准的双曲型方程.

1.2 两个自变数的方程的分类

- 关于抛物型和椭圆型方程的标准形式, 参见书p.131 – 132.

1.2 两个自变数的方程的分类

- 关于抛物型和椭圆型方程的标准形式, 参见书p.131 – 132.
- 关于多自变量($n > 2$)的方程的分类, 参见书p.132 – 134.

1.2 两个自变数的方程的分类.

(2) 常系数线性方程的化简

例 传输线方程

$$LCu_{tt} - u_{xx} + (LG + RC)u_t + RG u = 0.$$

特点:

- ① L, C, G, R 均为常数;
- ② 无 u_{tx}, u_x 项, 且方程是齐次的.

1.2 两个自变数的方程的分类

- 引入 $v(x, t)$, 设 $u(x, t)$ 与 $v(x, t)$ 的关系为:¹⁸

$$u(x, t) = e^{\lambda x + \mu t} v(x, t),$$

其中 λ, μ 为待定常数.

¹⁸这是凭经验猜的!

1.2 两个自变数的方程的分类

- 将 u 满足的方程转变为 v 满足的方程, 计算出:

$$\begin{cases} u_x = e^{\lambda x + \mu t}(v_x + \lambda v), \\ u_t = e^{\lambda x + \mu t}(v_t + \mu v), \\ u_{xx} = e^{\lambda x + \mu t}(v_{xx} + 2\lambda v_x + \lambda^2 v), \\ u_{xt} = e^{\lambda x + \mu t}(v_{xt} + \lambda v_t + \mu v_x + \lambda \mu v), \\ u_{tt} = e^{\lambda x + \mu t}(v_{tt} + 2\mu v_t + \mu^2 v). \end{cases}$$

1.2 两个自变数的方程的分类

- 将 u_{tt} , u_{xx} , u_t , u 代入原方程得:¹⁹

$$LCv_{tt} - v_{xx} - 2\lambda v_x + [2\mu LC + (LG + RC)]v_t + [LC\mu^2 - \lambda^2 + \mu(LG + RC) + RG]v = 0.$$

¹⁹似乎更复杂了?

1.2 两个自变数的方程的分类

- 为了使 v_t , v_x 项消失, 取

$$\begin{cases} \lambda = 0, \\ 2\mu LC + (LG + RC) = 0. \end{cases}$$

1.2 两个自变数的方程的分类

- 为了使 v_t , v_x 项消失, 取

$$\begin{cases} \lambda = 0, \\ 2\mu LC + (LG + RC) = 0. \end{cases}$$

- 解出待定系数 $\lambda = 0$, $\mu = -(LG + RC)/(2LC)$.
所以

$$\begin{cases} u(x, t) = e^{-\frac{LG+RC}{2LC}t} v(x, t), \\ LCv_{tt} - v_{xx} - \frac{(LG-RC)^2}{4LC}v = 0. \end{cases}$$

1.2 两个自变数的方程的分类

问题解答: $p.135, 1.(3)$

将 $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$ 化为标准形式.

1.2 两个自变数的方程的分类

问题解答: $p.135, 1.(3)$

将 $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$ 化为标准形式.

● 解: 对照一般形式, 写出系数:

$$a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{22} = 5, b_1 = 1, b_2 = 2, c = f = 0.$$

1.2 两个自变数的方程的分类

问题解答: $p.135, 1.(3)$

将 $u_{xx} + 4u_{xy} + 5u_{yy} + u_x + 2u_y = 0$ 化为标准形式.

- 解: 对照一般形式, 写出系数:

$$a_{11} = 1, a_{12} = 2, a_{22} = 5, b_1 = 1, b_2 = 2, c = f = 0.$$

- 判别式 $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -1 < 0 \implies$ 椭圆型方程.

1.2 两个自变数的方程的分类

● 特征方程：

$$\frac{dy}{dx} = 2 \pm i,$$

解出: $y = (2 \pm i)x + c$.

²⁰满足 $\xi = \eta^*$.

1.2 两个自变数的方程的分类

- 特征方程：

$$\frac{dy}{dx} = 2 \pm i,$$

解出: $y = (2 \pm i)x + c$.

- 所以选取²⁰

$$\begin{cases} \xi = (2 + i)x - y \\ \eta = (2 - i)x - y \end{cases}$$

²⁰满足 $\xi = \eta^*$.

1.2 两个自变数的方程的分类

- 由 $A_{11} = A_{22} = 0$, 得到标准型:

$$u_{\xi\eta} = -\frac{1}{2A_{12}}[B_1u_\xi + B_2u_\eta + cu + f].$$

1.2 两个自变数的方程的分类

- 由 $A_{11} = A_{22} = 0$, 得到标准型:

$$u_{\xi\eta} = -\frac{1}{2A_{12}}[B_1u_\xi + B_2u_\eta + cu + f].$$

- 算出 $A_{12} = 2$, $B_1 = i$, $B_2 = -i$, 并考虑到 $c = f = 0$. 所以

$$u_{\xi\eta} = -\frac{i}{4}(u_\xi - u_\eta).$$

1.2 两个自变数的方程的分类

- 进一步引入 α, β , 使得

$$\begin{cases} \xi = \alpha + i\beta \\ \eta = \alpha - i\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \\ \beta = \frac{1}{2i}(\xi - \eta) \end{cases}$$

1.2 两个自变数的方程的分类

- 进一步引入 α, β , 使得

$$\begin{cases} \xi = \alpha + i\beta \\ \eta = \alpha - i\beta \end{cases} \implies \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta) \\ \beta = \frac{1}{2i}(\xi - \eta) \end{cases}$$

- 得

$$\begin{aligned} u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} &= -\frac{1}{A_{12}}[(B_1 + B_2)u_\alpha + i(B_2 - B_1)u_\beta] \\ &= -\frac{1}{2}[0 \cdot u_\alpha + i(-2i)u_\beta] \\ &= -u_\beta. \end{aligned}$$

1.2 两个自变数的方程的分类

● 所以

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + u_{\beta} = 0,$$

1.2 两个自变数的方程的分类

● 所以

$$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} + u_{\beta} = 0,$$

● 且

$$\begin{cases} \alpha = 2x - y, \\ \beta = x. \end{cases}$$

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 生平简介：

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 生平简介:

- Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) 法国数学家, 启蒙思想家与哲学家.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 生平简介：
 - Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) 法国数学家, 启蒙思想家与哲学家.
- 主要贡献:

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 生平简介：
 - Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) 法国数学家, 启蒙思想家与哲学家.
- 主要贡献：
 - ① 偏微分方程, 力学上的“达朗贝尔原理”.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 生平简介：
 - Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) 法国数学家, 启蒙思想家与哲学家.
- 主要贡献：
 - ① 偏微分方程, 力学上的“达朗贝尔原理”.
 - ② 人类知识 $\left\{ \begin{array}{l} \text{历史} \\ \text{哲学(自然)} \\ \text{美术} \end{array} \right.$

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 生平简介：
 - Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) 法国数学家, 启蒙思想家与哲学家.
- 主要贡献：
 - ① 偏微分方程, 力学上的“达朗贝尔原理”.
 - ② 人类知识 { 历史
哲学(自然)
美术
 - ③ 哲学观点 { 知识来源于感觉, 反对“虚构的实在”.
精神不依赖于物质, 上帝是创始主.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 生平简介:

- Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) 法国数学家, 启蒙思想家与哲学家.

- 主要贡献:

- ① 偏微分方程, 力学上的“达朗贝尔原理”.
- ② 人类知识 { 历史
哲学(自然)
美术
- ③ 哲学观点 { 知识来源于感觉, 反对“虚构的实在”.
精神不依赖于物质, 上帝是创始主.

- 主要著作:

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 生平简介:

- Jean Le Rond d'Alembert (1717-1783) 法国数学家, 启蒙思想家与哲学家.

- 主要贡献:

- ① 偏微分方程, 力学上的“达朗贝尔原理”.
- ② 人类知识 { 历史
哲学(自然)
美术
- ③ 哲学观点 { 知识来源于感觉, 反对“虚构的实在”.
精神不依赖于物质, 上帝是创始主.

- 主要著作:

- 《哲学原理》, 《力学原理》, 《数学论文集》.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- { 问题： 求解齐次双曲型方程.
方法： 采用解常微分方程的方案.
即先求出通解,再由定解条件
确定任意积分常数.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

● { 问题： 求解齐次双曲型方程。
方法： 采用解常微分方程的方案。
即先求出通解,再由定解条件
确定任意积分常数。

目的:

虽然这种方法只适用于很少的偏微分方程,但是由此引出解偏微分方程的一般方法(求解方程的过程中,同时考虑定解条件!^a)

^a这是下面几章的内容.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

方程:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0.$$

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

方程:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0.$$

- 前面讲Fourier变换时, 解过的方程!

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

方程:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0.$$

- 前面讲Fourier变换时, 解过的方程!
- 下面通过变量代换的方式求解.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 第一步：先求通解.

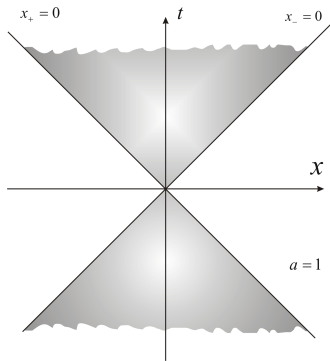
2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 第一步：先求通解.
- 将方程变形为:

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial (at)^2} \right] u = 0,$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial (at)} \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial (at)} \right] u = 0.$$

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式



引入“光锥”坐标 x_+ , x_- ,

$$x_{\pm} \equiv x \pm at, \implies \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x_+ + x_-) \\ at = \frac{1}{2}(x_+ - x_-) \end{cases}$$

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

● 则

$$\begin{aligned}\partial_+ &\equiv \frac{\partial}{\partial x_+} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial(at)} \right], \\ \partial_- &\equiv \frac{\partial}{\partial x_-} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial(at)} \right].\end{aligned}$$

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

● 则

$$\begin{aligned}\partial_+ &\equiv \frac{\partial}{\partial x_+} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial(at)} \right], \\ \partial_- &\equiv \frac{\partial}{\partial x_-} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial(at)} \right].\end{aligned}$$

● 且有性质： $\partial_+ x_- = 0$, $\partial_- x_+ = 0$.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

● 则

$$\begin{aligned}\partial_+ &\equiv \frac{\partial}{\partial x_+} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial(at)} \right], \\ \partial_- &\equiv \frac{\partial}{\partial x_-} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial(at)} \right].\end{aligned}$$

- 且有性质： $\partial_+ x_- = 0$, $\partial_- x_+ = 0$.
- 所以, 方程改写为： $\partial_+ \partial_- u = 0$, $(\partial_- \partial_+ u = 0)$,

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

● 或者写为:

$$\frac{\partial}{\partial x_+} \left(\frac{\partial u}{\partial x_-} \right) = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_-} \left(\frac{\partial u}{\partial x_+} \right) = 0 \right).$$

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 或者写为:

$$\frac{\partial}{\partial x_+} \left(\frac{\partial u}{\partial x_-} \right) = 0, \quad \left(\frac{\partial}{\partial x_-} \left(\frac{\partial u}{\partial x_+} \right) = 0 \right).$$

- 利用 $\partial_{\pm} x_{\mp} = 0$, 可解出

$$u(x_+, x_-) = f_1(x_+) + f_2(x_-),$$

或

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at).$$

其中 f_1 为 x_+ 的任意函数, f_2 为 x_- 的任意函数.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

解的物理意义:

$f_1(x_+)$ 表示以速率 a ($a > 0$)向 $-x$ 方向传播的行波;
 $f_2(x_-)$ 表示以速率 a ($a > 0$)向 $+x$ 方向传播的行波.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

解的物理意义:

$f_1(x_+)$ 表示以速率 a ($a > 0$)向 $-x$ 方向传播的行波;
 $f_2(x_-)$ 表示以速率 a ($a > 0$)向 $+x$ 方向传播的行波.

- 第二步：定解.

讨论无限长($-\infty < x < \infty$)杆和弦的问题, 它们对应于无边界条件的问题(即只用初始条件定解).

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 设初始条件为

$$\begin{aligned}u|_{t=0} &= \varphi(x), \\u_t|_{t=0} &= \psi(x),\end{aligned}$$

其中 $-\infty < x < \infty$.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 将上述条件代入通解

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at), \text{ 得}$$

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x). \end{cases}$$

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 将上述条件代入通解

$$u(x, t) = f_1(x + at) + f_2(x - at), \text{ 得}$$

$$\begin{cases} f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x), \\ af_1'(x) - af_2'(x) = \psi(x). \end{cases}$$

- 解得:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} [f_1(x_0) - f_2(x_0)], \\ f_2(x) &= \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^x \psi(\xi) d\xi - \frac{1}{2} [f_1(x_0) - f_2(x_0)]. \end{aligned}$$

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

所以, 得到解为:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= f_1(x + at) + f_2(x - at) \\ &= \frac{1}{2}\varphi(x + at) + \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x+at} \psi(\xi) d\xi + \frac{1}{2} [f_1(x_0) - f_2(x_0)] \\ &\quad + \frac{1}{2}\varphi(x - at) - \frac{1}{2a} \int_{x_0}^{x-at} \psi(\xi) d\xi - \frac{1}{2} [f_1(x_0) - f_2(x_0)], \end{aligned}$$

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

● 即²¹

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\varphi(x + at) + \varphi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

²¹ 此为d'Alembert公式.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

两种特殊情形:

- Case(i) 若初速 $\psi(x) = 0$, 则²²

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)]$$

²² 曾用Fourier变换得到过此结果.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

两种特殊情形:

- Case(i) 若初速 $\psi(x) = 0$, 则²²

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)]$$

²² 曾用Fourier变换得到过此结果.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

两种特殊情形:

- Case(i) 若初速 $\psi(x) = 0$, 则²²

$$u(x, t) = \frac{1}{2}[\varphi(x + at) + \varphi(x - at)]$$

- Case(ii) 若 $u|_{t=0} = \varphi(x) = 0$, 而 $u_t|_{t=0} = \psi(x) \neq 0$, 则

$$u(x, t) = \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi.$$

²² 曾用Fourier变换得到过此结果.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

下面利用 *d'Alembert* 公式写出半无界²³弦或杆的运动规律.

定解问题：

$$\begin{aligned} u_{tt} - a^2 u_{xx} &= 0 & (0 \leq x < \infty) \\ \begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ u_t|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} & & (0 \leq x < \infty) \\ u|_{x=0} &= 0 & (\text{端点固定, 第一类边界条件}) \end{aligned}$$

²³指有一个边界条件.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 方法:

对第一类边界条件, 将初始条件作奇延拓, 将半无界问题转化为无界问题, 然后利用d'Alembert公式.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 方法:

对第一类边界条件, 将初始条件作奇延拓, 将半无界问题转化为无界问题, 然后利用d'Alembert公式.

- 奇延拓

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0 \\ -\varphi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0 \\ -\psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

● 则解为:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi(x + at) + \Phi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi.$$

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 则解为:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [\Phi(x + at) + \Phi(x - at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi.$$

- 只取 $x \geq 0$ 的部分即可! (详细讨论见书)

2.达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 验证此解的确满足边界条件 $u(0, t) = 0$.

2.达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 验证此解的确满足边界条件 $u(0, t) = 0$.
- 显然

$$u(0, t) = \frac{1}{2}[\Phi(at) + \Phi(-at)] + \frac{1}{2a} \int_{-at}^{at} \Psi(\xi) d\xi$$

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

● 因为²⁴

$$\Phi(-at) = -\Phi(at)$$

²⁴ Φ 是奇函数.

²⁵ Ψ 也是奇函数, 它在对称区间积分为零.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 因为²⁴

$$\Phi(-at) = -\Phi(at)$$

- 且²⁵

$$\int_{-at}^{at} \Psi(\xi) d\xi = 0$$

²⁴ Φ 是奇函数.

²⁵ Ψ 也是奇函数, 它在对称区间积分为零.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 因为²⁴

$$\Phi(-at) = -\Phi(at)$$

- 且²⁵

$$\int_{-at}^{at} \Psi(\xi) d\xi = 0$$

- 所以

$$u(0, t) = 0.$$

²⁴ Φ 是奇函数.

²⁵ Ψ 也是奇函数, 它在对称区间积分为零.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 变一下问题：

若半无界杆的端点作自由振动, 则边界条件是第二类的, 即

$$u_x|_{x=0} = 0.$$

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

- 对此, 将初始条件作偶延拓即可,

$$\Phi(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x \geq 0, \\ \varphi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

$$\Psi(x) = \begin{cases} \psi(x), & x \geq 0, \\ \psi(-x), & x < 0. \end{cases}$$

其余讨论同上.

2. 达朗贝尔(d'Alembert)公式

思考题:

若端点是第三类边界条件

$$[u + Hu_x]|_{x=0} = 0.$$

如何求解?

直角坐标系中方程的分离变量法

第十一章、直角坐标系中方程的分离变量法²⁶

²⁶ 分离变量法, 即将偏微分方程转化成多个常微分方程进行求解.

1. 有界空间的齐次泛定方程(Fourier级数法)

一般解(通解)可以表示成Fourier级数的展开形式.

1.1 分离变量法一般介绍

- 偏微分方程的通解一般求不出来. 即使得到通解, 也包含任意函数. 求任意函数的过程实际上还得解方程.

1.1 分离变量法一般介绍

- 偏微分方程的通解一般求不出来. 即使得到通解, 也包含任意函数. 求任意函数的过程实际上还得解方程.
- 对偏微分方程直接求特解.

1.1 分离变量法一般介绍

- 偏微分方程的通解一般求不出来. 即使得到通解, 也包含任意函数. 求任意函数的过程实际上还得解方程.
- 对偏微分方程直接求特解.
- 分离变量:

$$u(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t).$$

1.1 分离变量法一般介绍

- 偏微分方程的通解一般求不出来. 即使得到通解, 也包含任意函数. 求任意函数的过程实际上还得解方程.
- 对偏微分方程直接求特解.
- 分离变量:

$$u(x, y, z, t) = X(x)Y(y)Z(z)T(t).$$

- 注: 适用范围较广, 但也不能解出所有方程.

1.2 两端固定的弦的自由振动

求解步骤:

- (1) 选择坐标

²⁷边界条件是第一类的.

1.2 两端固定的弦的自由振动

求解步骤:

- (1) 选择坐标

²⁷边界条件是第一类的.

1.2 两端固定的弦的自由振动

求解步骤:

- (1) 选择坐标
- (2) 写出定解问题²⁷

²⁷边界条件是第一类的.

1.2 两端固定的弦的自由振动

求解步骤:

- (1) 选择坐标
- (2) 写出定解问题²⁷

²⁷边界条件是第一类的.

1.2 两端固定的弦的自由振动

求解步骤:

- (1) 选择坐标
- (2) 写出定解问题²⁷

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & 0 < x < l, t > 0 \\ u(0, t) = u(l, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \phi(x), u_t(x, 0) = \psi(x), & 0 \leq x \leq l \end{cases}$$

²⁷边界条件是第一类的.

1.2 两端固定的弦的自由振动

- 两个自变量 x, t , 设

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

1.2 两端固定的弦的自由振动

- 两个自变量 x, t , 设

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

- 代入上述方程, 将方程、边界条件以及初始条件分离变量:

$$\begin{aligned} \Rightarrow XT'' - a^2X''T &= 0 \quad (X'' \equiv \frac{d^2X}{dx^2}, T'' \equiv \frac{d^2T}{dt^2}) \\ \frac{X''}{X} &= \frac{T''}{a^2T} = -\lambda. \end{aligned}$$

1.2 两端固定的弦的自由振动

- 两个自变量 x, t , 设

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

- 代入上述方程, 将方程、边界条件以及初始条件分离变量:

$$\begin{aligned} \Rightarrow XT'' - a^2X''T &= 0 \quad (X'' \equiv \frac{d^2X}{dx^2}, T'' \equiv \frac{d^2T}{dt^2}) \\ \frac{X''}{X} &= \frac{T''}{a^2T} = -\lambda. \end{aligned}$$

- 因为 $X(x)$ 与 $T(t)$ 相互独立, 所以

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T'' + \lambda a^2 T = 0.$$

1.2 两端固定的弦的自由振动

- 边界条件分离变量:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0,$$

因为 $T(t) \neq 0$, 所以 $X(0) = 0$.

$$u(l, t) = X(l)T(t) = 0,$$

因为 $T(t) \neq 0$, 所以 $X(l) = 0$.

1.2 两端固定的弦的自由振动

- 边界条件分离变量:

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0,$$

因为 $T(t) \neq 0$, 所以 $X(0) = 0$.

$$u(l, t) = X(l)T(t) = 0,$$

因为 $T(t) \neq 0$, 所以 $X(l) = 0$.

- 所以²⁸

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ X(0) = X(l) = 0 \end{cases}$$

²⁸空间部分的定解问题.

1.2 两端固定的弦的自由振动

● 初始条件分离变量:

$$u(x, 0) = X(x)T(0) = \phi(x) \implies T(0) = \frac{\phi(x)}{X(x)}$$

$$u_t(x, 0) = X(x)T'(0) = \psi(x) \implies T'(0) = \frac{\psi(x)}{X(x)}$$

1.2 两端固定的弦的自由振动

● 所以²⁹

$$\begin{cases} T'' + \lambda a^2 T = 0 \\ T(0) = \frac{\phi(x)}{X(x)}, \quad T'(0) = \frac{\psi(x)}{X(x)} \end{cases}$$

²⁹时间部分的定解问题.

1.2 两端固定的弦的自由振动

对 λ 的三种取值进行分析.

- (1) 若 $\lambda = 0$, 则 $X(x) = c_1x + c_2$, c_1, c_2 为常数.

$$X(0) = 0 \implies c_2 = 0; \quad X(l) = 0 \implies c_1 = 0.$$

1.2 两端固定的弦的自由振动

对 λ 的三种取值进行分析.

- (1) 若 $\lambda = 0$, 则 $X(x) = c_1x + c_2$, c_1, c_2 为常数.

$$X(0) = 0 \implies c_2 = 0; X(l) = 0 \implies c_1 = 0.$$

1.2 两端固定的弦的自由振动

对 λ 的三种取值进行分析.

- (1) 若 $\lambda = 0$, 则 $X(x) = c_1x + c_2$, c_1, c_2 为常数.

$$X(0) = 0 \implies c_2 = 0; X(l) = 0 \implies c_1 = 0.$$

- 因此, $X(x) = 0$, 恒零解, 没有意义.

$$u(x, t) = X(x)T(t) = 0.$$

1.2 两端固定的弦的自由振动

- (2) 若 $\lambda < 0$, 则由 $X(x)$ 满足的方程得:

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

1.2 两端固定的弦的自由振动

- (2) 若 $\lambda < 0$, 则由 $X(x)$ 满足的方程得:

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$



$$\left. \begin{aligned} X(0) = 0 &\implies c_1 + c_2 = 0 \\ X(l) = 0 &\implies c_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{aligned} \right\}$$

即, $c_1 = c_2 = 0$.

1.2 两端固定的弦的自由振动

- (2) 若 $\lambda < 0$, 则由 $X(x)$ 满足的方程得:

$$X(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$



$$\left. \begin{aligned} X(0) = 0 &\implies c_1 + c_2 = 0 \\ X(l) = 0 &\implies c_1 e^{\sqrt{-\lambda}l} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{aligned} \right\}$$

即, $c_1 = c_2 = 0$.

- 因此, 仍得到 $X(x) = 0$, 恒零解, 没有意义.

1.2 两端固定的弦的自由振动

- (3) 若 $\lambda > 0$, 则解得

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

$$X(0) = 0 \implies c_1 = 0$$

$$\begin{aligned} X(l) = 0 &\implies c_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0 \\ &\implies \sqrt{\lambda} = n\pi/l, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

1.2 两端固定的弦的自由振动

- (3) 若 $\lambda > 0$, 则解得

$$X(x) = c_1 \cos \sqrt{\lambda}x + c_2 \sin \sqrt{\lambda}x.$$

$$X(0) = 0 \implies c_1 = 0$$

$$\begin{aligned} X(l) = 0 &\implies c_2 \sin \sqrt{\lambda}l = 0 \\ &\implies \sqrt{\lambda} = n\pi/l, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

- 所以

$$X_n(x) = c_2 \sin \frac{n\pi}{l}x, \quad \lambda = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

1.2 两端固定的弦的自由振动

- 另外, 时间部分的方程为:

$$T'' + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T = 0,$$

1.2 两端固定的弦的自由振动

- 另外, 时间部分的方程为:

$$T'' + \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2 T = 0,$$

- 所以

$$T_n(t) = A'_n \cos \frac{n\pi a}{l}t + B'_n \sin \frac{n\pi a}{l}t.$$

1.2 两端固定的弦的自由振动

● 所以,

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= \left[A_n \cos \frac{n\pi a}{l}t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l}t \right] \sin \frac{n\pi}{l}x. \end{aligned}$$

1.2 两端固定的弦的自由振动

- 所以,

$$\begin{aligned}u_n(x, t) &= X_n(x)T_n(t) \\&= \left[A_n \cos \frac{n\pi a}{l}t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l}t \right] \sin \frac{n\pi}{l}x.\end{aligned}$$

- 从数学上来看, $X(x)$ 和 $T(t)$ 满足的方程称为本征值方程.

1.2 两端固定的弦的自由振动

本征值问题,

$$\hat{O}f \propto f,$$

或

$$\hat{O}f = \lambda f,$$

其中 $\hat{O}$ 为算符, f 为本征函数(或矢量空间中的矢量), λ 是对应的本征值.

1.2 两端固定的弦的自由振动

- 性质：所有本征值的本征函数是正交的, 完备的.

1.2 两端固定的弦的自由振动

- 性质：所有本征值的本征函数是正交的, 完备的.
- $u_n(x, t)$ 的含义：
 - ① 数学上, 对应于第 n 个本征值的本征解.
 - ② 物理上, 两端固定弦的固有振动(驻波解).

1.2 两端固定的弦的自由振动

- 行波：振幅相同, 位相不同, 位相依于时间和空间.

1.2 两端固定的弦的自由振动

- 行波：振幅相同, 位相不同, 位相依于时间和空间.
- 驻波：振幅依赖于空间, 位相仅仅依赖于时间.

1.2 两端固定的弦的自由振动

● 驻波的性质:

1.2 两端固定的弦的自由振动

- 驻波的性质:

- ① 频率 $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$, 波长 $\frac{2l}{n}$ ($f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{na}{2l}$, $\lambda_n = \frac{a}{f_n} = \frac{2l}{n}$)

1.2 两端固定的弦的自由振动

- 驻波的性质:

- ① 频率 $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$, 波长 $\frac{2l}{n}$ ($f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{na}{2l}$, $\lambda_n = \frac{a}{f_n} = \frac{2l}{n}$)
- ② 波节, 波腹的位置

1.2 两端固定的弦的自由振动

● 驻波的性质:

- ① 频率 $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$, 波长 $\frac{2l}{n}$ ($f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{na}{2l}$, $\lambda_n = \frac{a}{f_n} = \frac{2l}{n}$)
- ② 波节, 波腹的位置
 - $(n+1)$ 个波节

$$\sin \frac{n\pi}{l}x = 0 \implies x = 0, \frac{l}{n}, \dots, \frac{(n-1)l}{n}, l.$$

1.2 两端固定的弦的自由振动

● 驻波的性质:

● ① 频率 $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$, 波长 $\frac{2l}{n}$ ($f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{na}{2l}$, $\lambda_n = \frac{a}{f_n} = \frac{2l}{n}$)

● ② 波节, 波腹的位置

● $(n+1)$ 个波节

$$\sin \frac{n\pi}{l}x = 0 \implies x = 0, \frac{l}{n}, \dots, \frac{(n-1)l}{n}, l.$$

● n 个波腹

$$\sin \frac{n\pi}{l}x = \pm 1 \implies x = \frac{l}{2n}, \frac{3l}{2n}, \dots, \frac{(2n-1)l}{2n}.$$

1.2 两端固定的弦的自由振动

● 驻波的性质:

● ① 频率 $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$, 波长 $\frac{2l}{n}$ ($f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{na}{2l}$, $\lambda_n = \frac{a}{f_n} = \frac{2l}{n}$)

● ② 波节, 波腹的位置

● $(n+1)$ 个波节

$$\sin \frac{n\pi}{l}x = 0 \implies x = 0, \frac{l}{n}, \dots, \frac{(n-1)l}{n}, l.$$

● n 个波腹

$$\sin \frac{n\pi}{l}x = \pm 1 \implies x = \frac{l}{2n}, \frac{3l}{2n}, \dots, \frac{(2n-1)l}{2n}.$$

● ③ 基波, 谐波

1.2 两端固定的弦的自由振动

● 驻波的性质:

● ① 频率 $\omega_n = \frac{n\pi a}{l}$, 波长 $\frac{2l}{n}$ ($f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{na}{2l}$, $\lambda_n = \frac{a}{f_n} = \frac{2l}{n}$)

● ② 波节, 波腹的位置

● $(n+1)$ 个波节

$$\sin \frac{n\pi}{l}x = 0 \implies x = 0, \frac{l}{n}, \dots, \frac{(n-1)l}{n}, l.$$

● n 个波腹

$$\sin \frac{n\pi}{l}x = \pm 1 \implies x = \frac{l}{2n}, \frac{3l}{2n}, \dots, \frac{(2n-1)l}{2n}.$$

● ③ 基波, 谐波

● $n=1$ 是基波, 其它的是 n 次谐波.

1.2 两端固定的弦的自由振动

- $u_n(x, t)$ 仅仅是特解(本征解), 通解为:³⁰

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

³⁰ 由于是线性的.

1.2 两端固定的弦的自由振动

- $u_n(x, t)$ 仅仅是特解(本征解), 通解为:³⁰

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi a}{l} t + B_n \sin \frac{n\pi a}{l} t \right) \sin \frac{n\pi}{l} x.$$

- 由初始条件确定 A_n, B_n , 因为

$$\begin{cases} u(x, 0) = \phi(x) \implies \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi}{l} x = \phi(x) \\ u_t(x, 0) = \psi(x) \implies \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{l} \sin \frac{n\pi}{l} x = \psi(x) \end{cases}$$

³⁰ 由于是线性的.

1.2 两端固定的弦的自由振动

● 所以,

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx,$$
$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

1.2 两端固定的弦的自由振动

- 所以,

$$A_n = \frac{2}{l} \int_0^l \phi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx,$$
$$B_n = \frac{2}{n\pi a} \int_0^l \psi(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx.$$

- 性质：本征振动的方式由边界条件确定！初始条件确定叠加系数.

1.2 两端固定的弦的自由振动

归纳不同边界条件对应的本征振动:³¹

● (i) $u(0, t) = u(l, t) = 0$

$$\Rightarrow \lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad X(x) \sim \sin \frac{n\pi}{l}x.$$

³¹留作练习!

1.2 两端固定的弦的自由振动

归纳不同边界条件对应的本征振动:³¹

● (i) $u(0, t) = u(l, t) = 0$

$$\Rightarrow \lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad X(x) \sim \sin \frac{n\pi}{l}x.$$

³¹留作练习!

1.2 两端固定的弦的自由振动

归纳不同边界条件对应的本征振动:³¹

● (i) $u(0, t) = u(l, t) = 0$

$$\Rightarrow \lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots, \quad X(x) \sim \sin \frac{n\pi}{l}x.$$

● (ii) $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$

$$\Rightarrow \lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad X(x) \sim \cos \frac{n\pi}{l}x.$$

³¹留作练习!

1.2 两端固定的弦的自由振动

● (iii) $u(0, t) = 0, u_x(l, t) = 0.$

$$\Rightarrow \lambda = \left(\frac{n + \frac{1}{2}}{l} \pi \right)^2, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$X(x) \sim \sin \frac{n + \frac{1}{2}}{l} \pi x.$$

1.2 两端固定的弦的自由振动

● (iv) $u(0, t) = 0, u(l, t) + Hu_x(l, t) = 0$

1.2 两端固定的弦的自由振动

- (iv) $u(0, t) = 0, u(l, t) + Hu_x(l, t) = 0$
- 这种情况较复杂, 下面详细分析.
首先, 分离变量, 得

$$\begin{aligned} X(0) &= 0, \\ X(l) + HX'(l) &= 0. \end{aligned}$$

1.2 两端固定的弦的自由振动

● 设 $X(x) \sim \sin kx$, 则有

$$\sin kl + Hk \cos kl = 0.$$

³² k 是此超越方程的解!

1.2 两端固定的弦的自由振动

- 设 $X(x) \sim \sin kx$, 则有

$$\sin kl + Hk \cos kl = 0.$$

- 即³²

$$\tan kl = -Hk.$$

³² k 是此超越方程的解!

1.2 两端固定的弦的自由振动

- 设 $X(x) \sim \sin kx$, 则有

$$\sin kl + Hk \cos kl = 0.$$

- 即³²

$$\tan kl = -Hk.$$

- 注：推导书上的其它例题！

³² k 是此超越方程的解！

2.1 无界空间

无界空间的分离变量法与有界空间的类似,
只是它只有自然边界条件.

2.1 无界空间

例1 一维扩散问题

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 \\ \text{当 } x \rightarrow \pm\infty \text{ 时, } u \text{ 有限} \\ u(x, 0) = \phi(x). \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{(自然边界条件,} \\ \text{浓度是有限值)} \\ \text{(初始浓度分布)} \end{array}$$

2.1 无界空间

- 解：设 $u(x, t) = X(x)T(t)$, 代入原方程

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda,$$

2.1 无界空间

- 解：设 $u(x, t) = X(x)T(t)$, 代入原方程

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{a^2 T} = -\lambda,$$

- 即

$$\begin{cases} X'' + \lambda X = 0 \\ \text{当 } x \rightarrow \pm\infty \text{ 时, } X \text{ 有限.} \end{cases}, \quad \begin{cases} T' + a^2 \lambda T = 0 \\ X(x)T(0) = \phi(x) \end{cases}$$

2.1 无界空间

讨论 $X(x)$ 的定解问题:

- (1) 若 $\lambda = 0$, 则 $X(x) = c_1x + c_2$

2.1 无界空间

讨论 $X(x)$ 的定解问题:

- (1) 若 $\lambda = 0$, 则 $X(x) = c_1x + c_2$

2.1 无界空间

讨论 $X(x)$ 的定解问题:

- (1) 若 $\lambda = 0$, 则 $X(x) = c_1x + c_2$
 - 因为 $x \rightarrow \pm\infty$, X 有限, 所以 $c_1 = 0$.
所以 $X(x) = c_2$ (没有意义, 舍去).

2.1 无界空间

讨论 $X(x)$ 的定解问题:

- (1) 若 $\lambda = 0$, 则 $X(x) = c_1x + c_2$
 - 因为 $x \rightarrow \pm\infty$, X 有限, 所以 $c_1 = 0$.
所以 $X(x) = c_2$ (没有意义, 舍去).

2.1 无界空间

讨论 $X(x)$ 的定解问题:

- (1) 若 $\lambda = 0$, 则 $X(x) = c_1x + c_2$
 - 因为 $x \rightarrow \pm\infty$, X 有限, 所以 $c_1 = 0$.
所以 $X(x) = c_2$ (没有意义, 舍去).
- (2) 若 $\lambda < 0$, 则 $X(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$.

2.1 无界空间

讨论 $X(x)$ 的定解问题:

- (1) 若 $\lambda = 0$, 则 $X(x) = c_1x + c_2$
 - 因为 $x \rightarrow \pm\infty$, X 有限, 所以 $c_1 = 0$.
所以 $X(x) = c_2$ (没有意义, 舍去).
- (2) 若 $\lambda < 0$, 则 $X(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$.

2.1 无界空间

讨论 $X(x)$ 的定解问题:

- (1) 若 $\lambda = 0$, 则 $X(x) = c_1x + c_2$
 - 因为 $x \rightarrow \pm\infty$, X 有限, 所以 $c_1 = 0$.
所以 $X(x) = c_2$ (没有意义, 舍去).
- (2) 若 $\lambda < 0$, 则 $X(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$.
 - $x \rightarrow \pm\infty$, $X(x)$ 有限 $\implies c_1 = c_2 = 0$. 恒零解.

2.1 无界空间

讨论 $X(x)$ 的定解问题:

- (1) 若 $\lambda = 0$, 则 $X(x) = c_1x + c_2$
 - 因为 $x \rightarrow \pm\infty$, X 有限, 所以 $c_1 = 0$.
所以 $X(x) = c_2$ (没有意义, 舍去).
- (2) 若 $\lambda < 0$, 则 $X(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$.
 - $x \rightarrow \pm\infty$, $X(x)$ 有限 $\implies c_1 = c_2 = 0$. 恒零解.

2.1 无界空间

讨论 $X(x)$ 的定解问题:

- (1) 若 $\lambda = 0$, 则 $X(x) = c_1x + c_2$
 - 因为 $x \rightarrow \pm\infty$, X 有限, 所以 $c_1 = 0$.
所以 $X(x) = c_2$ (没有意义, 舍去).
- (2) 若 $\lambda < 0$, 则 $X(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$.
 - $x \rightarrow \pm\infty$, $X(x)$ 有限 $\implies c_1 = c_2 = 0$. 恒零解.
- (3) 若 $\lambda > 0$, 则 $X(x) = c_1e^{i\sqrt{\lambda}x} + c_2e^{-i\sqrt{\lambda}x}$.

2.1 无界空间

讨论 $X(x)$ 的定解问题:

- (1) 若 $\lambda = 0$, 则 $X(x) = c_1x + c_2$
 - 因为 $x \rightarrow \pm\infty$, X 有限, 所以 $c_1 = 0$.
所以 $X(x) = c_2$ (没有意义, 舍去).
- (2) 若 $\lambda < 0$, 则 $X(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$.
 - $x \rightarrow \pm\infty$, $X(x)$ 有限 $\implies c_1 = c_2 = 0$. 恒零解.
- (3) 若 $\lambda > 0$, 则 $X(x) = c_1e^{i\sqrt{\lambda}x} + c_2e^{-i\sqrt{\lambda}x}$.

2.1 无界空间

讨论 $X(x)$ 的定解问题:

- (1) 若 $\lambda = 0$, 则 $X(x) = c_1x + c_2$
 - 因为 $x \rightarrow \pm\infty$, X 有限, 所以 $c_1 = 0$.
所以 $X(x) = c_2$ (没有意义, 舍去).
- (2) 若 $\lambda < 0$, 则 $X(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$.
 - $x \rightarrow \pm\infty$, $X(x)$ 有限 $\implies c_1 = c_2 = 0$. 恒零解.
- (3) 若 $\lambda > 0$, 则 $X(x) = c_1e^{i\sqrt{\lambda}x} + c_2e^{-i\sqrt{\lambda}x}$.
 - 此解满足自然边界条件! 且自然边界条件对 λ 无限制!

2.1 无界空间

- 设 $\omega \equiv \sqrt{\lambda}$, $\omega: 0 \rightarrow +\infty$, 连续取值! 则

$$X(x) = c_1 e^{i\omega x} + c_2 e^{-i\omega x}.$$

2.1 无界空间

- 设 $\omega \equiv \sqrt{\lambda}$, $\omega: 0 \rightarrow +\infty$, 连续取值! 则

$$X(x) = c_1 e^{i\omega x} + c_2 e^{-i\omega x}.$$

- $T(t)$ 满足的方程: $T' + \omega^2 a^2 T = 0$. 所以

$$T(t) = D e^{-\omega^2 a^2 t}.$$

其中 D 为待定常数.

2.1 无界空间

- 满足方程和自然边界条件的解为:³³

$$u(x, t; \omega) = \left[A(\omega)e^{i\omega x} + B(\omega)e^{-i\omega x} \right] e^{-\omega^2 a^2 t}.$$

³³其中 ω 取值任意!

2.1 无界空间

一般解是 $u(x, t; \omega)$ 关于 ω 的叠加, 即积分:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega x} e^{-\omega^2 a^2 t} d\omega + \int_0^{+\infty} B(\omega) e^{-i\omega x} e^{-\omega^2 a^2 t} d\omega \\ &= \int_0^{+\infty} A(\omega) e^{i\omega x} e^{-\omega^2 a^2 t} d\omega \\ &\quad + \int_{-\infty}^0 B(-\omega) e^{i\omega x} e^{-\omega^2 a^2 t} d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega x} e^{-\omega^2 a^2 t} d\omega. \end{aligned}$$

2.1 无界空间

● 其中

$$C(\omega) = \begin{cases} A(\omega), & \omega > 0, \\ B(-\omega), & \omega < 0. \end{cases}$$

其中 $C(\omega)$ 为待定系数!

2.1 无界空间

- 利用初始条件定 $C(\omega)$. 因为

$$u(x, 0) = \phi(x),$$

2.1 无界空间

- 利用初始条件定 $C(\omega)$. 因为

$$u(x, 0) = \phi(x),$$

- 所以

$$\int_{-\infty}^{+\infty} C(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \phi(x).$$

2.1 无界空间

- 由Fourier积分, 得

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-i\omega x} dx.$$

2.1 无界空间

- 由Fourier积分, 得

$$C(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(x) e^{-i\omega x} dx.$$

- 因此,

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \phi(\xi) \cdot \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega(\xi-x)} e^{-\omega^2 a^2 t} d\omega.$$

2.1 无界空间

● 利用公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2 \alpha^2} e^{\beta \omega} d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha^2}},$$

2.1 无界空间

● 利用公式

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\omega^2 \alpha^2} e^{\beta \omega} d\omega = \frac{\sqrt{\pi}}{\alpha} e^{\frac{\beta^2}{4\alpha^2}},$$

● 所以

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\xi) \left[\frac{1}{2a \sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} \right] d\xi.$$

2.1 无界空间

- 讨论因子 $\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}$ 的物理意义.

2.1 无界空间

- 讨论因子 $\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}}$ 的物理意义.
- 设 $u(x, 0) = \Phi_0 \delta(x - x_0)$, 而且 $u(x, 0) = \phi(x)$, Φ_0 是在 x_0 处的物质总量, 则

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\Phi_0}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}} \\ &= \frac{\Phi_0}{4a\sqrt{t}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}. \end{aligned}$$

2.1 无界空间

- 讨论因子 $\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}$ 的物理意义.
- 设 $u(x, 0) = \Phi_0 \delta(x - x_0)$, 而且 $u(x, 0) = \phi(x)$, Φ_0 是在 x_0 处的物质总量, 则

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\Phi_0}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}} \\ &= \frac{\Phi_0}{4a\sqrt{t}} \cdot \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}}. \end{aligned}$$

- 注：上式第二部分正是Gauss函数.

2.1 无界空间

● 解的意义：

瞬时点源产生的场(Green函数), 因为将解代回到初始条件得:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}} = \delta(x - x_0).$$

2.1 无界空间

- 解的意义：

瞬时点源产生的场(Green函数), 因为将解代回到初始条件得:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{4a^2 t}} = \delta(x - x_0).$$

- 无界空间中解的特点：

自然边界条件 $\rightarrow$ 本征值 ω 是连续谱, 使解的形式是 ω 的Fourier积分形式. 本征解可以分离变量, 但最后的解不能分离变量.

2.2 半无界空间

方法：解析延拓成无界空间的问题.

2.2 半无界空间

例1

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 \\ u_x|_{x=0} = 0 \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases}$$

绝热条件

$x \rightarrow +\infty$ 端点是自然边界条件!

2.2 半无界空间

- 对第二类边界条件, 初始条件作偶延拓:

$$\begin{cases} U_t - a^2 U_{xx} = 0, & -\infty < x < +\infty \\ U_x|_{x=0} = 0, \\ U(x, 0) = \begin{cases} \phi(x), & x > 0 \\ \phi(-x), & x < 0 \end{cases} \end{cases}$$

得到 $U(x, t)$ 后, 取 $x > 0$ 部分即可.

2.2 半无界空间

例2

$$\begin{cases} u_t - a^2 u_{xx} = 0 \\ u|_{x=0} = 0 \text{ (第一类边界条件)} \\ u(x, 0) = \phi(x) \end{cases}$$

2.2 半无界空间

● 奇延拓后,

$$\begin{cases} U_t - a^2 U_{xx} = 0, \\ U|_{x=0} = 0, \\ U(x, 0) = \begin{cases} \phi(x), & x > 0 \\ -\phi(-x), & x < 0 \end{cases} \end{cases}.$$

九、方程和定解条件的导出
十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式
十一、直角坐标系中方程的分离变量法
十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法
十三、球函数
第十四章、柱函数

1. 有界空间的齐次泛定方程(Fourier级数法)
2. 无界空间的齐次泛定方程(Fourier积分法)
3. 补充知识 (有关常微分方程的求解)

2.3 有界空间补充例题

有界空间齐次泛定方程求解(Fourier级数法) 补充例题

2.3 有界空间补充例题

例1 二维Laplace方程(直角坐标系)^a

^a见书p.152 例3.

定解问题:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u|_{x=0} = u_0, \quad u|_{x=a} = u_0, \\ u|_{y=0} = u_0, \quad u|_{y=b} = U. \end{cases}$$

³⁴齐次化边界条件.

2.3 有界空间补充例题

例1 二维Laplace方程(直角坐标系)^a

^a见书p.152 例3.

定解问题:

$$\begin{cases} u_{xx} + u_{yy} = 0, \\ u|_{x=0} = u_0, \quad u|_{x=a} = u_0, \\ u|_{y=0} = u_0, \quad u|_{y=b} = U. \end{cases}$$

● 特点: 边界条件是非齐次的.³⁴

³⁴齐次化边界条件.

2.3 有界空间补充例题

● 方法一：

设 $u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$, 令 v, w 分别满足如下的方程和边界条件.

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0 \\ v|_{x=0} = u_0, v|_{x=a} = u_0 \\ v|_{y=0} = 0, v|_{y=b} = 0 \end{cases}, \begin{cases} w_{xx} + w_{yy} = 0 \\ w|_{x=0} = 0, w|_{x=a} = 0 \\ w|_{y=0} = u_0, w|_{y=b} = U \end{cases}$$

2.3 有界空间补充例题

- 对 $v(x, y)$ 而言, $y = 0, y = b$ 处是第一类齐次边界条件;

2.3 有界空间补充例题

- 对 $v(x, y)$ 而言, $y = 0, y = b$ 处是第一类齐次边界条件;
- 对 $w(x, y)$ 而言 $x = 0, x = a$ 处是第一类齐次边界条件.

2.3 有界空间补充例题

- 对 $v(x, y)$ 而言, $y = 0, y = b$ 处是第一类齐次边界条件;
- 对 $w(x, y)$ 而言 $x = 0, x = a$ 处是第一类齐次边界条件.
- 所以可利用前面的方法,³⁵ 分别对 v, w 分离变量求解.

³⁵解两端固定弦的方法.

2.3 有界空间补充例题

- 方法二：设 $u(x, y) = u_0 + v(x, y)$,³⁶ 则定解问题变成,

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, \\ v|_{x=0}, v|_{x=a} = 0, \\ v|_{y=0} = 0, v|_{y=b} = U - u_0. \end{cases} \quad (\text{这一组被齐次化})$$

³⁶仅适用于本例.

2.3 有界空间补充例题

- 方法二：设 $u(x, y) = u_0 + v(x, y)$,³⁶ 则定解问题变成,

$$\begin{cases} v_{xx} + v_{yy} = 0, \\ v|_{x=0}, v|_{x=a} = 0, \\ v|_{y=0} = 0, v|_{y=b} = U - u_0. \end{cases} \quad (\text{这一组被齐次化})$$

- 然后, 按通常的方法对 $v(x, y)$ 分离变量.

³⁶仅适用于本例.

九、方程和定解条件的导出
十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式
十一、直角坐标系中方程的分离变量法
十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法
十三、球函数
第十四章、柱函数

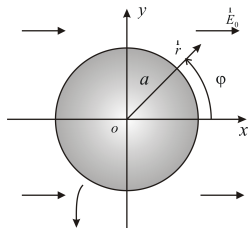
1. 有界空间的齐次泛定方程(Fourier级数法)
2. 无界空间的齐次泛定方程(Fourier积分法)
3. 补充知识 (有关常微分方程的求解)

2.3 有界空间补充例题

例2

二维Laplace方程(柱坐标系)^a

^a见书p.154 例4.



无限长导体圆柱，与z轴平行。

2.3 有界空间补充例题

● 定解问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0, & (\rho > a) \\ u|_{\rho=a} = 0, \\ u|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow -E_0 \rho \cos \varphi, \end{cases}$$

上式第一个式子表示极坐标中的Laplace方程, 第二式表示导体电势为零, 第三式表示无限远处仍为匀强电场 $\vec{E}_0$.

2.3 有界空间补充例题

求解步骤：

- 第一：物理问题转化为定解问题.³⁷

³⁷ 参见书上叙述.

³⁸ 参见书上叙述.

2.3 有界空间补充例题

求解步骤：

- 第一：物理问题转化为定解问题.³⁷

³⁷ 参见书上叙述.

³⁸ 参见书上叙述.

2.3 有界空间补充例题

求解步骤：

- 第一：物理问题转化为定解问题.³⁷
- 第二：求解 $u(\rho, \varphi)$. (电势分布)

³⁷ 参见书上叙述.

³⁸ 参见书上叙述.

2.3 有界空间补充例题

求解步骤：

- 第一：物理问题转化为定解问题.³⁷
- 第二：求解 $u(\rho, \varphi)$. (电势分布)

³⁷ 参见书上叙述.

³⁸ 参见书上叙述.

2.3 有界空间补充例题

求解步骤：

- 第一：物理问题转化为定解问题.³⁷
- 第二：求解 $u(\rho, \varphi)$. (电势分布)
- 第三：解的物理意义.³⁸

³⁷ 参见书上叙述.

³⁸ 参见书上叙述.

2.3 有界空间补充例题

- 设 $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$, 并代入方程得:

$$\frac{1}{R}\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) = -\frac{1}{\Phi}\Phi''.$$

2.3 有界空间补充例题

- 设 $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\Phi(\varphi)$, 并代入方程得:

$$\frac{1}{R}\rho\frac{d}{d\rho}\left(\rho\frac{dR}{d\rho}\right) = -\frac{1}{\Phi}\Phi''.$$

- 左右两端应等于一个共同的参数 λ , 因此

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0. \end{cases}$$

2.3 有界空间补充例题

- 注意：存在一个自然边界条件

$$u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi),$$

即

$$\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi).$$

2.3 有界空间补充例题

- 先讨论 $\Phi(\varphi)$ 的定解问题:

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \end{cases}$$

³⁹若 $c_1 = 0$, 此解满足周期性条件, 它对应于case(iii)中的 $m = 0$.

2.3 有界空间补充例题

- 先讨论 $\Phi(\varphi)$ 的定解问题:

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \end{cases}$$

- 分三种情况:

³⁹若 $c_1 = 0$, 此解满足周期性条件, 它对应于case(iii)中的 $m = 0$.

2.3 有界空间补充例题

- 先讨论 $\Phi(\varphi)$ 的定解问题:

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \end{cases}$$

- 分三种情况:
 - (i) 若 $\lambda = 0$, 则 $\Phi(\varphi) = c_1\varphi + c_2$. 显然不满足周期性条件.³⁹

³⁹若 $c_1 = 0$, 此解满足周期性条件, 它对应于case(iii)中的 $m = 0$.

2.3 有界空间补充例题

- 先讨论 $\Phi(\varphi)$ 的定解问题:

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \end{cases}$$

- 分三种情况:
 - (i) 若 $\lambda = 0$, 则 $\Phi(\varphi) = c_1\varphi + c_2$. 显然不满足周期性条件.³⁹
 - (ii) 若 $\lambda < 0$, 则 $\Phi(\varphi) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}$, 也不满足周期性条件.

³⁹若 $c_1 = 0$, 此解满足周期性条件, 它对应于case(iii)中的 $m = 0$.

2.3 有界空间补充例题

- 先讨论 $\Phi(\varphi)$ 的定解问题:

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi). \end{cases}$$

- 分三种情况:

- (i) 若 $\lambda = 0$, 则 $\Phi(\varphi) = c_1\varphi + c_2$. 显然不满足周期性条件.³⁹
- (ii) 若 $\lambda < 0$, 则 $\Phi(\varphi) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}\varphi} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}$, 也不满足周期性条件.
- (iii) 若 $\lambda > 0$, 则 $\Phi(\varphi) = A \cos \sqrt{\lambda}\varphi + B \sin \sqrt{\lambda}\varphi$.

³⁹若 $c_1 = 0$, 此解满足周期性条件, 它对应于case(iii)中的 $m = 0$.

2.3 有界空间补充例题

- 由周期性条件,

$$\begin{aligned} & A \cos \sqrt{\lambda}(\varphi + 2\pi) + B \sin \sqrt{\lambda}(\varphi + 2\pi) \\ &= A \cos \sqrt{\lambda}\varphi + B \sin \sqrt{\lambda}\varphi, \end{aligned}$$

得 $\sqrt{\lambda} = m$, 或 $\lambda = m^2$, 其中 $m = 0, 1, 2, \dots$,

$$\Phi(\varphi) = A \cos m\varphi + B \sin m\varphi.$$

2.3 有界空间补充例题

- 由周期性条件,

$$\begin{aligned} & A \cos \sqrt{\lambda}(\varphi + 2\pi) + B \sin \sqrt{\lambda}(\varphi + 2\pi) \\ &= A \cos \sqrt{\lambda}\varphi + B \sin \sqrt{\lambda}\varphi, \end{aligned}$$

得 $\sqrt{\lambda} = m$, 或 $\lambda = m^2$, 其中 $m = 0, 1, 2, \dots$,

$$\Phi(\varphi) = A \cos m\varphi + B \sin m\varphi.$$

- 上述 λ 为本征值, $\Phi(\varphi)$ 为本征函数.

2.3 有界空间补充例题

● 第二步：求解 $R(\rho)$.

将 $\lambda = m^2$ 代入, 得 $R(\rho)$ 的定解问题:⁴⁰

$$\rho^2 \frac{d^2 R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} - m^2 R = 0.$$

⁴⁰Euler型常微分方程.

2.3 有界空间补充例题

- 令 $\rho = e^t$, 即 $t = \ln \rho$, 则将上式化简为:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - m^2 R = 0,$$

2.3 有界空间补充例题

- 令 $\rho = e^t$, 即 $t = \ln \rho$, 则将上式化简为:

$$\frac{d^2 R}{dt^2} - m^2 R = 0,$$

- 其解为:

$$R = \begin{cases} Ce^{mt} + De^{-mt} = C\rho^m + D\frac{1}{\rho^m} & (m \neq 0) \\ C + Dt = C + D \ln \rho & (m = 0) \end{cases}$$

2.3 有界空间补充例题

- 因此, 本征解为:

$$u_0(\rho, \varphi) = C_0 + D_0 \ln \rho, \quad (m = 0),$$

$$\begin{aligned} u_m(\rho, \varphi) = & \rho^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) \\ & + \rho^{-m} (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi), \\ & (m \neq 0) \end{aligned}$$

2.3 有界空间补充例题

- 故Laplace方程的一般解为:

$$\begin{aligned} u(\rho, \varphi) = & C_0 + D_0 \ln \rho \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} \rho^{-m} (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi). \end{aligned}$$

2.3 有界空间补充例题

- 下面利用 ρ 的边界条件确定系数 $C_0, D_0, A_m, B_m, C_m, D_m$. 因为

$$u(\rho, \varphi)|_{\rho=a} = 0,$$

2.3 有界空间补充例题

- 下面利用 ρ 的边界条件确定系数 $C_0, D_0, A_m, B_m, C_m, D_m$. 因为

$$u(\rho, \varphi)|_{\rho=a} = 0,$$

- 所以

$$\begin{aligned} C_0 + D_0 \ln a + \sum_{m=1}^{\infty} a^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi) \\ + \sum_{m=1}^{\infty} a^{-m} (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi) = 0. \end{aligned}$$

2.3 有界空间补充例题

- Fourier级数为零, 表示所有项的系数为零, 即

$$\begin{cases} C_0 + D_0 \ln a = 0, \\ a^m A_m + a^{-m} C_m = 0, \\ a^m B_m + a^{-m} D_m = 0, \end{cases}$$

2.3 有界空间补充例题

- Fourier级数为零, 表示所有项的系数为零, 即

$$\begin{cases} C_0 + D_0 \ln a = 0, \\ a^m A_m + a^{-m} C_m = 0, \\ a^m B_m + a^{-m} D_m = 0, \end{cases}$$

- 解出

$$\begin{cases} C_0 = -D_0 \ln a, \\ C_m = -A_m a^{2m}, \\ D_m = -B_m a^{2m}. \end{cases}$$

2.3 有界空间补充例题

- 另外, 当 $\rho \rightarrow \infty$ 时,⁴¹

$$u(\rho, \varphi)|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)$$

⁴¹ 因为其它项, 如 $C_0 + D_0 \ln \rho$ 和 ρ^{-m} 远远小于 ρ^m , 所以可以略去.

2.3 有界空间补充例题

- 另外, 当 $\rho \rightarrow \infty$ 时,⁴¹

$$u(\rho, \varphi)|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \rho^m (A_m \cos m\varphi + B_m \sin m\varphi)$$

- 对照边界条件 $u(\rho, \varphi)|_{\rho \rightarrow \infty} \rightarrow -E_0 \rho \cos \varphi$, 得

$$A_m = 0, B_m = 0, (m > 1).$$

⁴¹ 因为其它项, 如 $C_0 + D_0 \ln \rho$ 和 ρ^{-m} 远远小于 ρ^m , 所以可以略去.

2.3 有界空间补充例题

- 比较 ρ^1 项, 有: $A_1 = -E_0$, $B_1 = 0$.

2.3 有界空间补充例题

- 比较 ρ^1 项, 有: $A_1 = -E_0$, $B_1 = 0$.
- 由前面可解出,

$$\begin{cases} C_1 = -A_1 a^2 = E_0 a^2, \\ C_m = 0, \quad m > 1 \\ D_m = 0, \quad m \geq 1. \end{cases}$$

2.3 有界空间补充例题

● 所以, 最后的解为:

$$u(\rho, \varphi) = D_0 \ln \frac{\rho}{a} - E_0 \rho \cos \varphi + E_0 \frac{a^2}{\rho} \cos \varphi.$$

2.3 有界空间补充例题

- 所以, 最后的解为:

$$u(\rho, \varphi) = D_0 \ln \frac{\rho}{a} - E_0 \rho \cos \varphi + E_0 \frac{a^2}{\rho} \cos \varphi.$$

- 其中右边第一项的物理意义是圆柱体所带电荷产生的场, 右边第二项表示原匀强电场, 右边第三项表示圆柱体周围对匀强电场的修正.

3.1 n 阶常系数齐次线性方程

n 阶常系数齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

求解 $y(x)$, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均为常数.

3.1 n 阶常系数齐次线性方程

n 阶常系数齐次线性方程

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0.$$

求解 $y(x)$, 其中 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均为常数.

- 对应上述方程的特征方程是:

$$\lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0.$$

这是个代数方程, λ (n 个根)称为特征根.

3.1 n 阶常系数齐次线性方程

解法：

- ① 先找出 n 个线性无关的特解；

3.1 n 阶常系数齐次线性方程

解法:

- ① 先找出 n 个线性无关的特解;

3.1 n 阶常系数齐次线性方程

解法:

- ① 先找出 n 个线性无关的特解;
- ②通解是 n 个特解的线性组合.

3.1 n 阶常系数齐次线性方程

特征根与线性无关特解的联系:

特征根

- (i) $\lambda_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 是互异实根
对应的线性无关的特解
 $y_i(x) = e^{\lambda_i x}, i = 1, 2, \dots, n.$

3.1 n 阶常系数齐次线性方程

特征根与线性无关特解的联系:

特征根

$$(ii) \quad \begin{cases} \lambda = \alpha + i\beta \text{ 是单复根, 则} \\ \bar{\lambda} = \alpha - i\beta \text{ 也是特征根.} \end{cases}$$

对应的线性无关的特解

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ y_2(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{cases}$$

3.1 n 阶常系数齐次线性方程

特征根与线性无关特解的联系:

特征根

(iii) λ 是 r 重实根.

对应的线性无关的特解

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{\lambda x}, y_2(x) = xe^{\lambda x}, \\ \cdots, y_r(x) = x^{r-1}e^{\lambda x}. \end{cases}$$

3.1 n 阶常系数齐次线性方程

特征根与线性无关特解的联系:

特征根

(iv) $\lambda = \alpha + i\beta$ 是 r 重复根, 则
 $\bar{\lambda} = \alpha - i\beta$ 也是 r 重复根.

对应的线性无关的特解

$$\begin{cases} y_1(x) = e^{\alpha x} \cos \beta x, y_2(x) = x e^{\alpha x} \cos \beta x, \\ \cdots, y_r(x) = x^{r-1} e^{\alpha x} \cos \beta x; \\ y_{r+1}(x) = e^{\alpha x} \sin \beta x, y_{r+2}(x) = x e^{\alpha x} \sin \beta x, \\ \cdots, y_{2r}(x) = x^{r-1} e^{\alpha x} \sin \beta x. \end{cases}$$

3.1 n 阶常系数齐次线性方程

例1 $y'' + \omega^2 y = 0$, 简谐振动

特征方程:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0.$$

特征根:

$$\lambda_1 = i\omega, \lambda_2 = -i\omega.$$

3.1 n 阶常系数齐次线性方程

- 此例对应于上述情形(ii), 且 $\alpha = 0$, 所以, 两个特解为:

$$\cos \omega x, \quad \sin \omega x.$$

3.1 n 阶常系数齐次线性方程

- 此例对应于上述情形(ii), 且 $\alpha = 0$, 所以, 两个特解为:

$$\cos \omega x, \quad \sin \omega x.$$

- 所以, 通解为

$$y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x.$$

3.1 n 阶常系数齐次线性方程

- 此例对应于上述情形(ii), 且 $\alpha = 0$, 所以, 两个特解为:

$$\cos \omega x, \quad \sin \omega x.$$

- 所以, 通解为

$$y(x) = c_1 \cos \omega x + c_2 \sin \omega x.$$

- 或由指数的Euler公式, 写成

$$y(x) = Ce^{i\omega x} + De^{-i\omega x}.$$

3.2 Euler方程(变系数)

Euler方程

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = 0,$$

其中 a_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) 均为常数.^a

^a这是变系数齐次线性微分方程.

3.2 Euler方程(变系数)

Euler方程

$$x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y = 0,$$

其中 a_i ($i = 1, 2, \cdots, n$) 均为常数.^a

^a这是变系数齐次线性微分方程.

- 令 $x = e^\xi$, 则可将Euler方程变成常系数齐次线性方程! 然后, 利用前述公式求解.

3.2 Euler方程(变系数)

例1

二阶Euler方程,^a

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0.$$

^a此例是球坐标系中径向部分的方程, 其中 l 为正整数.

3.2 Euler方程(变系数)

● 令 $r = e^\xi$, 则 $\xi = \ln r$.

$$\frac{dR}{dr} = \frac{dR}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} = \frac{1}{r} \frac{dR}{d\xi},$$

$$\begin{aligned} \frac{d^2 R}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{dR}{d\xi} \right) = -\frac{1}{r^2} \frac{dR}{d\xi} + \frac{1}{r} \frac{d^2 R}{d\xi^2} \frac{d\xi}{dr} \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{dR}{d\xi} + \frac{1}{r^2} \frac{d^2 R}{d\xi^2}. \end{aligned}$$

3.2 Euler方程(变系数)

● 代入原方程得:⁴²

$$\frac{d^2 R}{d\xi^2} + \frac{dR}{d\xi} - l(l+1)R = 0.$$

⁴²得到常系数方程.

3.2 Euler方程(变系数)

● 特征方程:

$$\lambda^2 + \lambda - l(l+1) = 0.$$

3.2 Euler方程(变系数)

- 特征方程:

$$\lambda^2 + \lambda - l(l+1) = 0.$$

- 特征根:

$$\begin{aligned}\lambda_{1,2} &= \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4l(l+1)}}{2} \\ &= \frac{-1 \pm (2l+1)}{2} = \begin{cases} l \\ -(l+1) \end{cases}\end{aligned}$$

3.2 Euler方程(变系数)

● 特解:

$$e^{l\xi} = e^{l \ln r} = r^l, \quad e^{-(l+1)\xi} = e^{-(l+1) \ln r} = r^{-(l+1)}.$$

3.2 Euler方程(变系数)

- 特解:

$$e^{l\xi} = e^{l \ln r} = r^l, \quad e^{-(l+1)\xi} = e^{-(l+1) \ln r} = r^{-(l+1)}.$$

- 所以, 通解:

$$R(r) = Cr^l + \frac{D}{r^{l+1}}.$$

九、方程和定解条件的导出
十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式
十一、直角坐标系中方程的分离变量法
十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法
十三、球函数
第十四章、柱函数

1. 有界空间的齐次泛定方程(Fourier级数法)
2. 无界空间的齐次泛定方程(Fourier积分法)
3. 补充知识 (有关常微分方程的求解)

3.2 Euler方程(变系数)

● Euler简介

3.2 Euler方程(变系数)

- Euler简介

- Leonhard Euler (1707-1783) 瑞士数学家

3.2 Euler方程(变系数)

● Euler简介

- Leonhard Euler (1707-1783) 瑞士数学家
- 研究领域：
几何学, 微积分, 理论流体动力学, 数论.

3.2 Euler方程(变系数)

● Euler简介

- Leonhard Euler (1707-1783) 瑞士数学家
- 研究领域：
几何学, 微积分, 理论流体动力学, 数论.
- 主要著作：
《无穷小分析引论》，《微积分原理》，《积分学原理》.

3.2 Euler方程(变系数)

● Euler简介

- Leonhard Euler (1707-1783) 瑞士数学家
- 研究领域：
几何学, 微积分, 理论流体动力学, 数论.
- 主要著作：
《无穷小分析引论》，《微积分原理》，《积分学原理》.

● Abel简介

3.2 Euler方程(变系数)

● Euler简介

- Leonhard Euler (1707-1783) 瑞士数学家
- 研究领域：
几何学, 微积分, 理论流体动力学, 数论.
- 主要著作：
《无穷小分析引论》，《微积分原理》，《积分学原理》.

● Abel简介

- Niels Henrik Abel (1802-1829) 挪威数学家

3.2 Euler方程(变系数)

● Euler简介

- Leonhard Euler (1707-1783) 瑞士数学家
- 研究领域：
几何学, 微积分, 理论流体动力学, 数论.
- 主要著作：
《无穷小分析引论》，《微积分原理》，《积分学原理》.

● Abel简介

- Niels Henrik Abel (1802-1829) 挪威数学家
- 主要贡献：
椭圆函数论(与德国数学家K. G. J. Jacobi),
 $U(1)$ 群也称为Abel群.

3.2 Euler方程(变系数)

- 问题解答：为什么第一类边界条件作奇延拓，第二类边界条件作偶延拓？

3.2 Euler方程(变系数)

- 问题解答：为什么第一类边界条件作奇延拓，第二类边界条件作偶延拓？
- 答：

3.2 Euler方程(变系数)

- 问题解答：为什么第一类边界条件作奇延拓，第二类边界条件作偶延拓？

- 答：

- 若 $f(x)|_{x=0} = 0 \rightarrow F(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases} .$

3.2 Euler方程(变系数)

- 问题解答：为什么第一类边界条件作奇延拓，第二类边界条件作偶延拓？
- 答：
 - 若 $f(x)|_{x=0} = 0 \rightarrow F(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases}$.
 - 当 $x = 0$ 时, $f(0) = -f(0)$, 即 $f(0) = 0 \implies F(0) = 0$.

3.2 Euler方程(变系数)

- 问题解答：为什么第一类边界条件作奇延拓，第二类边界条件作偶延拓？

- 答：

- 若 $f(x)|_{x=0} = 0 \rightarrow F(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases}$.
- 当 $x = 0$ 时, $f(0) = -f(0)$, 即 $f(0) = 0 \implies F(0) = 0$.
- 若 $f'(x)|_{x=0} = 0 \rightarrow F(x) \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$

3.2 Euler方程(变系数)

- 问题解答：为什么第一类边界条件作奇延拓，第二类边界条件作偶延拓？

- 答：

- 若 $f(x)|_{x=0} = 0 \rightarrow F(x) = \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ -f(-x), & x < 0 \end{cases}$.
- 当 $x = 0$ 时, $f(0) = -f(0)$, 即 $f(0) = 0 \implies F(0) = 0$.
- 若 $f'(x)|_{x=0} = 0 \rightarrow F(x) \begin{cases} f(x), & x > 0 \\ f(-x), & x < 0 \end{cases}$
- 当 $x = 0$ 时, $f'(0) = -f'(0)$,
即 $f'(0) = 0 \implies F'(0) = 0$.

球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

第十二章、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

选坐标系的原则：

使区域的边界和一个或几个坐标面重合，或根据问题的对称性来选。

1.1 球、柱坐标系中的Laplace算符

球、柱坐标系中的Laplace算符

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla, \quad \nabla \equiv \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}.$$

1.1 球、柱坐标系中的Laplace算符

● 球坐标系:

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} u \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} u \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} u \\ &= \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} (ru) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}$$

1.1 球、柱坐标系中的Laplace算符

● $\nabla^2 \vec{A} = ?$ 有兴趣者自己推导.

1.1 球、柱坐标系中的Laplace算符

● 柱坐标系:

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{A} = & \vec{e}_\rho \left(\nabla^2 A_\rho - \frac{1}{\rho^2} A_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right) \\ & + \vec{e}_\varphi \left(\nabla^2 A_\varphi - \frac{1}{\rho^2} A_\varphi + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} \right) + \vec{e}_z \nabla^2 A_z. \end{aligned}$$

1.1 球、柱坐标系中的Laplace算符

- 推导 $\nabla^2 u$, $\nabla^2 A$ 的步骤:

1.1 球、柱坐标系中的Laplace算符

- 推导 $\nabla^2 u$, $\nabla^2 \vec{A}$ 的步骤:
- 根据 ∇u , $\nabla \cdot \vec{A}$, $\nabla \times \vec{A}$ 的定义, 求出它们在球、柱坐标系中的表达式, 再利用

$$\nabla^2 u = \nabla \cdot \nabla u,$$

$$\nabla^2 \vec{A} = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{A}).$$

1.2 Laplace方程的变数分离

(1) 球坐标中

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0.$$

1.2 Laplace方程的变数分离

● 设⁴³ $u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$, 代入方程得:

$$\frac{Y}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{R}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{R}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} = 0.$$

⁴³其中 $R(r)$ 为径向函数, $Y(\theta, \varphi)$ 为角向函数.

1.2 Laplace方程的变数分离

整理后,

$$\begin{aligned}\frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) &= \left[-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right] \frac{1}{Y} \\ &= l(l+1),\end{aligned}$$

其中 l 为正整数, 理由后面讲.

1.2 Laplace方程的变数分离

● 所以⁴⁴

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0.$$

⁴⁴得到Euler型方程.

1.2 Laplace方程的变数分离

● 所以⁴⁴

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0.$$

● 两个线性无关的解为:

$$R(r) : r^l, r^{-(l+1)}.$$

⁴⁴得到Euler型方程.

1.2 Laplace方程的变数分离

● 另外, $Y(\theta, \varphi)$ 满足,⁴⁵

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + l(l+1)Y = 0.$$

⁴⁵ 这是球函数方程, $Y(\theta, \varphi)$ 球谐函数.

1.2 Laplace方程的变数分离

- 进一步分离变量, 设

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi),$$

1.2 Laplace方程的变数分离

- 进一步分离变量, 设

$$Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi),$$

- 则代入球函数方程, 得

$$\begin{aligned} \Phi'' + \lambda\Phi &= 0, \\ \sin\theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin\theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + [l(l+1)\sin^2\theta - \lambda]\Theta &= 0. \end{aligned}$$

1.2 Laplace方程的变数分离

- 考虑到 $\Phi(\varphi)$ 的周期性边界条件, 即

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \end{cases}$$

1.2 Laplace方程的变数分离

- 考虑到 $\Phi(\varphi)$ 的周期性边界条件, 即

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \end{cases}$$

- 得到 $\Phi(\varphi)$ 的二个线性无关解为

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) : \cos m\varphi, \sin m\varphi, \\ (\lambda = m^2, m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \end{aligned}$$

1.2 Laplace方程的变数分离

- 现在, 只剩下 $\Theta(\theta)$ 未知, 它满足的方程为

$$\sin \theta \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta} \right) + [l(l+1) \sin^2 \theta - m^2] \Theta = 0.$$

1.2 Laplace方程的变数分离

- 设 $x = \cos \theta$, ($\theta \in [0, \pi] \rightarrow x \in [-1, +1]$),
 $y(x) = \Theta(\theta)$, 则⁴⁶

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] y = 0.$$

⁴⁶ 此为缔合Legendre方程.

1.2 Laplace方程的变数分离

- 设 $x = \cos \theta$, ($\theta \in [0, \pi] \rightarrow x \in [-1, +1]$),
 $y(x) = \Theta(\theta)$, 则⁴⁶

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1 - x^2} \right] y = 0.$$

- 关于 x 的自然边界条件:
当 $x = \pm 1$, 即 $\theta = 0, \pi$ 时, $y(x)$ 有界!

⁴⁶ 此为缔合Legendre方程.

1.2 Laplace方程的变数分离

(2) 柱坐标中

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

1.2 Laplace方程的变数分离

- 分离变量:

$$u(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z),$$

1.2 Laplace方程的变数分离

- 分离变量:

$$u(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z),$$

- 代入方程得:

$$\frac{\Phi Z}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{RZ}{\rho^2} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + R\Phi \frac{d^2Z}{dz^2} = 0.$$

1.2 Laplace方程的变数分离

- 分离变量:

$$u(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z),$$

- 代入方程得:

$$\frac{\Phi Z}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{RZ}{\rho^2} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + R\Phi \frac{d^2Z}{dz^2} = 0.$$

- 两端同乘 $\frac{1}{R\Phi Z}$, 得:

$$\frac{1}{R\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} = -\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = -\mu.$$

1.2 Laplace方程的变数分离

● 所以

$$Z'' - \mu Z = 0,$$
$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -\mu \rho^2,$$

1.2 Laplace方程的变数分离

● 所以

$$Z'' - \mu Z = 0,$$
$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = -\mu \rho^2,$$

● 即

$$\frac{\rho}{R} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \mu \rho^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \lambda.$$

1.2 Laplace方程的变数分离

● 所以

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0,$$
$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(\mu - \frac{\lambda}{\rho^2} \right) R = 0.$$

1.2 Laplace方程的变数分离

- 三个方程中, 先解 $\Phi(\varphi)$.

1.2 Laplace方程的变数分离

- 三个方程中, 先解 $\Phi(\varphi)$.
- 考虑到周期性边界条件, 有

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \end{cases}$$

1.2 Laplace方程的变数分离

- 三个方程中, 先解 $\Phi(\varphi)$.
- 考虑到周期性边界条件, 有

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \end{cases}$$

- 得 $\Phi(\varphi) : \cos m\varphi, \sin m\varphi, 0 \leq \varphi \leq 2\pi;$
 $\lambda = m^2, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

1.2 Laplace方程的变数分离

- 再解 $Z(z)$ 和 $R(\rho)$, 它们满足的方程则为:

$$Z'' - \mu Z = 0,$$
$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(\mu - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0.$$

1.2 Laplace方程的变数分离

- 再解 $Z(z)$ 和 $R(\rho)$, 它们满足的方程则为:

$$Z'' - \mu Z = 0,$$
$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(\mu - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0.$$

- 注: μ 的取值范围依赖于 Z 的边界是齐次的, 还是 $R(\rho)$ 的边界是齐次的!

1.2 Laplace方程的变数分离

- 情形(i): Z 的边界条件齐次化,⁴⁷ 则 $\mu \leq 0$.
(前面讨论过, 方程 $X'' + \lambda X = 0$ 对应第一, 二, 三类齐次边界条件时, X 有非零解要求 $\lambda \geq 0$.)

$$Z(z), \cos hz, \sin hz; \quad h \equiv \sqrt{-\mu}.$$

⁴⁷ 上下底齐次边界条件.

1.2 Laplace方程的变数分离

● 令 $x = \sqrt{-\mu}\rho$, 则 $R(x)$ 满足⁴⁸

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} - \left(1 + \frac{m^2}{x^2}\right) R = 0.$$

⁴⁸ 这是 m 阶虚宗量 Bessel 方程.

1.2 Laplace方程的变数分离

- 情形(ii): $R(\rho)$ 的边界条件齐次,⁴⁹ 则 $\mu \geq 0$.⁵⁰

$$Z(z) : e^{\sqrt{\mu}z}, e^{-\sqrt{\mu}z}.$$

⁴⁹侧面齐次边界条件.

⁵⁰待证明.

⁵¹这是 m 阶Bessel方程. 如果令 $x \rightarrow ix$, 则它变成 m 阶虚宗量Bessel方程.

1.2 Laplace方程的变数分离

- 情形(ii): $R(\rho)$ 的边界条件齐次,⁴⁹ 则 $\mu \geq 0$.⁵⁰

$$Z(z) : e^{\sqrt{\mu}z}, e^{-\sqrt{\mu}z}.$$

- 令 $x = \sqrt{\mu}\rho$, 则 $R(x)$ 满足⁵¹

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) R = 0.$$

⁴⁹侧面齐次边界条件.

⁵⁰待证明.

⁵¹这是 m 阶Bessel方程. 如果令 $x \rightarrow ix$, 则它变成 m 阶虚宗量Bessel方程.

1.3 Helmholtz方程的分离变量

Helmholtz方程的产生

Hermann Ludwig Ferdinand von Helmholtz, 1821-1894, 德国物理学家, 生理学家.

1.3 Helmholtz方程的分离变量

(1) 来自波动方程

$$u_{tt} - a^2 \nabla^2 u = 0.$$

1.3 Helmholtz方程的分离变量

(1) 来自波动方程

$$u_{tt} - a^2 \nabla^2 u = 0.$$

- 分离变量 $u(\vec{r}, t) = v(\vec{r})T(t)$, 代入方程得:

$$vT'' - a^2 T \nabla^2 v = 0,$$

1.3 Helmholtz方程的分离变量

(1) 来自波动方程

$$u_{tt} - a^2 \nabla^2 u = 0.$$

- 分离变量 $u(\vec{r}, t) = v(\vec{r})T(t)$, 代入方程得:

$$vT'' - a^2 T \nabla^2 v = 0,$$

- 或⁵²

$$\frac{T''}{a^2 T} = \frac{\nabla^2 v}{v} = -k^2,$$

⁵²为什么等于 $-k^2$?

1.3 Helmholtz方程的分离变量

● 所以⁵³

$$\begin{aligned}\nabla^2 v + k^2 v &= 0, \\ T'' + k^2 a^2 T &= 0.\end{aligned}$$

⁵³ v 满足的方程就是Helmholtz方程.

1.3 Helmholtz方程的分离变量

● 所以⁵³

$$\begin{aligned}\nabla^2 v + k^2 v &= 0, \\ T'' + k^2 a^2 T &= 0.\end{aligned}$$

● $T(t)$ 的两个线性无关的特解为:

$$\begin{aligned}T(t) : \quad & \cos kat, \quad \sin kat, \quad (k \neq 0) \\ & 1, \quad t, \quad (k = 0)\end{aligned}$$

⁵³ v 满足的方程就是Helmholtz方程.

1.3 Helmholtz方程的分离变量

(2) 来自输运方程

$$u_t - a^2 \nabla^2 u = 0.$$

1.3 Helmholtz方程的分离变量

(2) 来自输运方程

$$u_t - a^2 \nabla^2 u = 0.$$

- 设 $u(\vec{r}, t) = v(\vec{r})T(t)$, 代入方程得:

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{\nabla^2 v}{v} = -k^2.$$

1.3 Helmholtz方程的分离变量

(2) 来自输运方程

$$u_t - a^2 \nabla^2 u = 0.$$

- 设 $u(\vec{r}, t) = v(\vec{r})T(t)$, 代入方程得:

$$\frac{T'}{a^2 T} = \frac{\nabla^2 v}{v} = -k^2.$$

- 仍选比例常数为 $-k^2$.

1.3 Helmholtz方程的分离变量

● 所以

$$\begin{aligned}\nabla^2 v + k^2 v &= 0, & (\text{Helmholtz方程}) \\ T' + k^2 a^2 T &= 0.\end{aligned}$$

1.3 Helmholtz方程的分离变量

● 所以

$$\begin{aligned}\nabla^2 v + k^2 v &= 0, & (\text{Helmholtz方程}) \\ T' + k^2 a^2 T &= 0.\end{aligned}$$

● 因此, 可解出时间部分的函数,

$$T(t) : e^{-k^2 a^2 t}.$$

1.3 Helmholtz方程的分离变量

(1) 球坐标系中,

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + k^2 r^2 v = 0.$$

1.3 Helmholtz方程的分离变量

- 令 $v(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$, 代入方程得:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 r^2 &= \left[-\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} \right] \frac{1}{Y} \\ &= l(l+1). \end{aligned}$$

1.3 Helmholtz方程的分离变量

● 所以⁵⁴

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + l(l+1)Y = 0,$$

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + [k^2 r^2 - l(l+1)] R = 0.$$

⁵⁴第一式为球函数方程，第二式为球Bessel方程。

1.3 Helmholtz方程的分离变量

- 令 $x = kr$, $R(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}y(x)$, 则球Bessel方程化为:⁵⁵

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left[1 - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{x^2}\right]y = 0.$$

⁵⁵ 这是 $(l + \frac{1}{2})$ 阶 Bessel 方程.

1.3 Helmholtz方程的分离变量

- 令 $x = kr$, $R(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}}y(x)$, 则球Bessel方程化为:⁵⁵

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left[1 - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{x^2}\right]y = 0.$$

- 注：分离Helmholtz方程，共引入三个分离常数，它们分别是 k, l, m .

⁵⁵ 这是 $(l + \frac{1}{2})$ 阶Bessel方程.

1.3 Helmholtz方程的分离变量

(2) 柱坐标系中,

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial v}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + k^2 v = 0.$$

1.3 Helmholtz方程的分离变量

- 分离变量 $v(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$, 代入方程:

$$\frac{\Phi Z}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{RZ}{\rho^2} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + R\Phi \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 R\Phi Z = 0,$$

1.3 Helmholtz方程的分离变量

- 分离变量 $v(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$, 代入方程:

$$\frac{\Phi Z}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{RZ}{\rho^2} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + R\Phi \frac{d^2Z}{dz^2} + k^2 R\Phi Z = 0,$$

- 分离一次变量,

$$\frac{1}{R\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \frac{1}{\rho^2\Phi} \frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + k^2 = -\frac{1}{Z} \frac{d^2Z}{dz^2} = -\mu,$$

1.3 Helmholtz方程的分离变量

- 因此,

$$Z'' - \mu Z = 0,$$

1.3 Helmholtz方程的分离变量

- 因此,

$$Z'' - \mu Z = 0,$$

- 再分离一次变量,

$$\frac{1}{R} \rho \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + (k^2 + \mu) \rho^2 = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = \lambda,$$

1.3 Helmholtz方程的分离变量

● 所以,

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0,$$

1.3 Helmholtz方程的分离变量

- 所以,

$$\Phi'' + \lambda\Phi = 0,$$

- 径向部分满足,

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 + \mu - \frac{\lambda}{\rho^2} \right) R = 0.$$

1.3 Helmholtz方程的分离变量

● 由定解问题

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \end{cases}$$

1.3 Helmholtz方程的分离变量

- 由定解问题

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \end{cases}$$

- 得到:

$$\Phi(\varphi) : \cos m\varphi, \sin m\varphi; \lambda = m^2, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

1.3 Helmholtz方程的分离变量

- 由定解问题

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0, \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi), \end{cases}$$

- 得到:

$$\Phi(\varphi) : \cos m\varphi, \sin m\varphi; \lambda = m^2, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

- 关于 $R(\rho)$ 和 $Z(z)$, 由于Helmholtz方程来自波动方程和输运方程, 它不同于Poisson方程. Z 与 R 的边界条件都是齐次的!

1.3 Helmholtz方程的分离变量

● Z 方向的定解问题:

$$\begin{cases} Z'' - \mu Z = 0, \\ Z \text{ 上附有齐次边界条件.} \end{cases}$$

1.3 Helmholtz方程的分离变量

- Z 方向的定解问题:

$$\begin{cases} Z'' - \mu Z = 0, \\ Z \text{ 上附有齐次边界条件.} \end{cases}$$

- 本征解为 $Z(z) : \cos hz, \sin hz;$

$$h^2 \equiv -\mu, \mu \leq 0.$$

1.3 Helmholtz方程的分离变量

● $R(\rho)$ 满足的方程:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 + \mu - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0.$$

⁵⁶这是 m 阶Bessel方程.

1.3 Helmholtz方程的分离变量

- $R(\rho)$ 满足的方程:

$$\frac{d^2 R}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR}{d\rho} + \left(k^2 + \mu - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R = 0.$$

- 令 $x \equiv \sqrt{k^2 + \mu} \rho = \sqrt{k^2 - h^2} \rho$, 则⁵⁶

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2} \right) R = 0.$$

⁵⁶这是 m 阶 Bessel 方程.

1.3 Helmholtz方程的分离变量

归纳:

- (1) Laplace方程, Helmholtz方程在球, 柱坐标系中分离变量后, 未解出部分分别满足 Legendre方程和Bessel方程.

1.3 Helmholtz方程的分离变量

归纳:

- (1) Laplace方程, Helmholtz方程在球, 柱坐标系中分离变量后, 未解出部分分别满足 Legendre方程和Bessel方程.

1.3 Helmholtz方程的分离变量

归纳:

- (1) Laplace方程, Helmholtz方程在球, 柱坐标系中分离变量后, 未解出部分分别满足 Legendre方程和Bessel方程.
- (2) 求解Legendre方程用常点领域的级数解法. (本章第二节内容)

1.3 Helmholtz方程的分离变量

归纳:

- (1) Laplace方程, Helmholtz方程在球, 柱坐标系中分离变量后, 未解出部分分别满足Legendre方程和Bessel方程.
- (2) 求解Legendre方程用常点领域的级数解法. (本章第二节内容)

1.3 Helmholtz方程的分离变量

归纳:

- (1) Laplace方程, Helmholtz方程在球, 柱坐标系中分离变量后, 未解出部分分别满足 Legendre方程和Bessel方程.
- (2) 求解Legendre方程用常点领域的级数解法. (本章第二节内容)
- (3) 求解Bessel方程用正则奇点的级数解法. (本章第三节内容)

2. 常点领域的级数解法

二阶线性变系数方程:

$$W''(z) + p(z)W'(z) + q(z)W(z) = 0,$$

其中 $p(z)$, $q(z)$ 为已知的复变函数.

2. 常点领域的级数解法

二阶线性变系数方程:

$$W''(z) + p(z)W'(z) + q(z)W(z) = 0,$$

其中 $p(z)$, $q(z)$ 为已知的复变函数.

- 常点: 如果在 z_0 点, $p(z)$, $q(z)$ 解析, 则称 z_0 为方程的常点.

2. 常点领域的级数解法

二阶线性变系数方程:

$$W''(z) + p(z)W'(z) + q(z)W(z) = 0,$$

其中 $p(z)$, $q(z)$ 为已知的复变函数.

- 常点: 如果在 z_0 点, $p(z)$, $q(z)$ 解析, 则称 z_0 为方程的常点.
- 奇点: 如果在 z_0 点, $p(z)$, $q(z)$ 一个不解析或两个都不解析, 则称 z_0 为方程的奇点.

2. 常点领域的级数解法

定理1 如果 $p(z)$, $q(z)$ 在 $|z - z_0| < R$ 单值解析, 则方程

$$W'' + p(z)W' + q(z)W = 0$$

在 $|z - z_0| < R$ 有唯一解, 它可以表示成此区域上的Taylor级数

$$W(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k,$$

2. 常点领域的级数解法

其中展开系数 $\{a_k\}$ 可将级数解代入方程并利用初值 $W(z_0) = c_0$, $W'(z_0) = c_1$ 定出.

2. 常点领域的级数解法

下面以Legendre方程为例求解.

缔合Legendre方程:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dy}{dx} \right] + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] y = 0,$$

其中 $x = \cos \theta$, $\theta \in [0, \pi]$, $x \in [-1, +1]$, $y(x) = \Theta(\theta)$;
 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

2. 常点领域的级数解法

- 如果问题有轴对称性, 对称轴为极轴, 则 $u(r, \theta, \varphi)$ 与 φ 无关, 即 $m = 0$.⁵⁷

⁵⁷ 因为 $\Phi(\varphi) : \cos m\varphi, \sin m\varphi$.

2. 常点领域的级数解法

- 如果问题有轴对称性, 对称轴为极轴, 则 $u(r, \theta, \varphi)$ 与 φ 无关, 即 $m = 0$.⁵⁷
- 所以

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{dy}{dx} \right] + l(l + 1)y = 0.$$

这就是Legendre方程, 其解称为Legendre多项式.

⁵⁷ 因为 $\Phi(\varphi) : \cos m\varphi, \sin m\varphi$.

2. 常点领域的级数解法

● 或⁵⁸

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1)y = 0,$$

$$y'' - \frac{2x}{1 - x^2}y' + \frac{l(l + 1)}{1 - x^2}y = 0.$$

⁵⁸这是Legendre方程.

2. 常点领域的级数解法

- 对照普遍的二阶变系数线性方程, 有

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, \quad q(x) = \frac{l(l+1)}{1-x^2}.$$

2. 常点领域的级数解法

- 对照普遍的二阶变系数线性方程, 有

$$p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}, \quad q(x) = \frac{l(l+1)}{1-x^2}.$$

- 显然, $x_0 = 0$ 是 Legendre 方程的常点!
 $x_0 = \pm 1$ 是 Legendre 方程的奇点!

2. 常点领域的级数解法

- 设Legendre方程存在级数解:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k.$$

2. 常点领域的级数解法

● 代入方程, 有

$$(1-x^2) \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - 2x \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^{k-1} + l(l+1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

2. 常点领域的级数解法

● 或

$$\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} - \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)a_k x^k \\ - 2 \sum_{k=0}^{\infty} k a_k x^k + l(l+1) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = 0.$$

2. 常点领域的级数解法

- 同幂次项系数必为零, x^n 的系数:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + l(l+1)a_n = 0.$$

2. 常点领域的级数解法

- 同幂次项系数必为零, x^n 的系数:

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + l(l+1)a_n = 0.$$

- 即⁵⁹

$$a_{n+2} = \frac{n(n+1) - l(l+1)}{(n+2)(n+1)} a_n.$$

⁵⁹ 系数间的递推关系.

2. 常点领域的级数解法

- 若取 $a_0 = 1$, 则 $a_0 \rightarrow a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow \cdots$, 一个特解 $y_1(x)$ 只含 x 的偶次幂;

2. 常点领域的级数解法

- 若取 $a_0 = 1$, 则 $a_0 \rightarrow a_2 \rightarrow a_4 \rightarrow \cdots$, 一个特解 $y_1(x)$ 只含 x 的偶次幂;
- 若取 $a_1 = 1$, 则 $a_1 \rightarrow a_3 \rightarrow a_5 \rightarrow \cdots$, 另一个特解 $y_2(x)$ 只含 x 的奇次幂.

2. 常点领域的级数解法

- 所以, $y_1(x)$, $y_2(x)$ 为 Legendre 方程的两个线性无关特解.

2. 常点领域的级数解法

- 所以, $y_1(x)$, $y_2(x)$ 为 Legendre 方程的两个线性无关特解.
- 其通解为:

$$y(x) = c_0 y_1(x) + c_1 y_2(x),$$

其中 c_0 , c_1 为任意常数.

2. 常点领域的级数解法

- $y_1(x)$, $y_2(x)$ 的收敛半径:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+2}} = 1.$$

⁶⁰参见书上附录四, p.397.

2. 常点领域的级数解法

- $y_1(x)$, $y_2(x)$ 的收敛半径:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+2}} = 1.$$

- 另外, 可证:⁶⁰

⁶⁰参见书上附录四, p.397.

2. 常点领域的级数解法

- $y_1(x), y_2(x)$ 的收敛半径:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+2}} = 1.$$

- 另外, 可证:⁶⁰

- y_1, y_2 在 $x = \pm 1$ (即 $\theta = 0, \pi$ 处) 发散, 即方程的通解 $c_0 y_1 + c_1 y_2$ 亦发散.

⁶⁰ 参见书上附录四, p.397.

2. 常点领域的级数解法

- $y_1(x), y_2(x)$ 的收敛半径:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+2}} = 1.$$

- 另外, 可证:⁶⁰

- y_1, y_2 在 $x = \pm 1$ (即 $\theta = 0, \pi$ 处) 发散, 即方程的通解 $c_0 y_1 + c_1 y_2$ 亦发散.
- $x = \pm 1$, 即 $\theta = 0, \pi$. y_1, y_2 在 $x = \pm 1$ 发散, 对应于 y_1, y_2 在整个极轴上发散 $\Rightarrow$ 物理上的矛盾.

⁶⁰ 参见书上附录四, p.397.

2. 常点领域的级数解法

● 物理情形：

因为方程是齐次的，即对应无源的情况，这要求在整个空间(包括极轴上)都应有解!⁶¹

⁶¹相当于自然边界条件.

2. 常点领域的级数解法

- 物理情形：

因为方程是齐次的，即对应无源的情况，这要求在整个空间(包括极轴上)都应有解!⁶¹

- 这个自然边界条件 $\Rightarrow y_1, y_2$ 应该是多项式(不发散)，即 l 为正整数。

⁶¹相当于自然边界条件.

2. 常点领域的级数解法

- 若 l 为偶数, y_1 中断为 l 次幂多项式; y_2 仍为无穷级数, 在 $x = \pm 1$ 发散.

2. 常点领域的级数解法

- 若 l 为偶数, y_1 中断为 l 次幂多项式; y_2 仍为无穷级数, 在 $x = \pm 1$ 发散.
- 若 l 为奇数, y_2 中断为 l 次幂多项式; y_1 仍为无穷级数, 在 $x = \pm 1$ 发散.

2. 常点领域的级数解法

● 通常选

$$a_l = \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}.$$

⁶²这就是 l 阶Legendre多项式!

2. 常点领域的级数解法

- 通常选

$$a_l = \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}.$$

- 则 $a_l \rightarrow a_{l-2} \rightarrow a_{l-4} \cdots$.

⁶²这就是 l 阶Legendre多项式!

2. 常点领域的级数解法

- 通常选

$$a_l = \frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}.$$

- 则 $a_l \rightarrow a_{l-2} \rightarrow a_{l-4} \cdots$.

- 这样选定系数后的 l 次多项式记为 $P_l(x)$.⁶² 另外, 发散解记为 $Q_l(x)$.

⁶²这就是 l 阶Legendre多项式!

2. 常点领域的级数解法

● $P_l(x)$ 的具体形式:

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{l}{2}]} (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k! (l-k)! (l-2k)!} x^{l-2k},$$

2. 常点领域的级数解法

- $P_l(x)$ 的具体形式:

$$P_l(x) = \sum_{k=0}^{[\frac{l}{2}]} (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k! (l-k)! (l-2k)!} x^{l-2k},$$

- 其中

$$\left[\frac{l}{2} \right] = \begin{cases} \frac{l}{2}, & l \text{ 为偶数,} \\ \frac{l-1}{2}, & l \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

3. 正则奇点领域上的级数解法

二阶线性变系数方程:

$$W''(z) + p(z)W'(z) + q(z)W(z) = 0,$$

其中 $p(z)$, $q(z)$ 为已知的复变函数.

3. 正则奇点领域上的级数解法

- 若解 $W(z)$ 在 z_0 的领域 $0 < |z - z_0| < R$ 只有有限个负幂次项, 则称 z_0 是方程的正则奇点.

3. 正则奇点领域上的级数解法

- 若解 $W(z)$ 在 z_0 的领域 $0 < |z - z_0| < R$ 只有有限个负幂次项, 则称 z_0 是方程的正则奇点.
- 可以证明:
若 $p(z)$ 在 z_0 为不高于一阶的极点, $q(z)$ 在 z_0 为不高于一阶的极点, 则 z_0 是 $W(z)$ 正则奇点.

3. 正则奇点领域上的级数解法

归纳正则奇点 z_0 领域的级数解法步骤:

(1) 将 $p(z)$, $q(z)$ 在 z_0 领域展开成Laurent级数

$$p(z) = \frac{p_{-1}}{z - z_0} + \sum_{k=0}^{\infty} p_k (z - z_0)^k,$$

$$q(z) = \frac{q_{-2}}{(z - z_0)^2} + \sum_{k=-1}^{\infty} q_k (z - z_0)^k.$$

3. 正则奇点领域上的级数解法

(2) 设 $W(z) = (z - z_0)^s \sum_{k=0}^{\infty} C_k(z - z_0)^k$, 代入方程得:

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{\infty} (s+k)(s+k-1)C_k(z-z_0)^{s+k-2} \\ & + \left[\sum_{k=-1}^{\infty} p_k(z-z_0)^k \right] \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} (s+k)c_k(z-z_0)^{s+k-1} \right] \\ & + \left[\sum_{k=-2}^{\infty} q_k(z-z_0)^k \right] \cdot \left[\sum_{k=0}^{\infty} C_k(z-z_0)^{s+k} \right] = 0. \end{aligned}$$

3. 正则奇点领域上的级数解法

- 上式最低次幂($k = 0$)项为:

$$s(s-1)C_0(z-z_0)^{s-2} + p_{-1}sC_0(z-z_0)^{s-2} + q_{-2}C_0(z-z_0)^{s-2} = 0.$$

⁶³这是指标方程.

3. 正则奇点领域上的级数解法

- 上式最低次幂($k = 0$)项为:

$$s(s-1)C_0(z-z_0)^{s-2} + p_{-1}sC_0(z-z_0)^{s-2} + q_{-2}C_0(z-z_0)^{s-2} = 0.$$

- 由 $C_0 \neq 0 \implies$ 其系数为零, 即⁶³

$$s(s-1) + p_{-1}s + q_{-2} = 0$$

⁶³这是指标方程.

3. 正则奇点领域上的级数解法

- 由一般项系数为零可得到系数的递推关系，即 C_k 之间的关系.

3. 正则奇点领域上的级数解法

(3)

由指标方程解出两个根 s_1, s_2 (通常选 $s_1 > s_2$).

3. 正则奇点领域上的级数解法

(3)

由指标方程解出两个根 s_1, s_2 (通常选 $s_1 > s_2$).

- (i) 若 $s_1 - s_2 \neq$ 整数, 则方程的两个特解 $W_1(z), W_2(z)$ 线性无关, 即

$$W_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^{s_1+k},$$

$$W_2(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k (z - z_0)^{s_2+k}.$$

3. 正则奇点领域上的级数解法

● 通解为

$$W(z) = AW_1(z) + BW_2(z).$$

3. 正则奇点领域上的级数解法

- (ii) 若 $s_1 - s_2 = \text{整数}$, 则上述 $W_1(z)$, $W_2(z)$ 线性相关. 因此, 设

$$W_2(z) = gW_1(z) \ln(z-z_0) + (z-z_0)^{s_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k.$$

3. 正则奇点领域上的级数解法

- (ii) 若 $s_1 - s_2 = \text{整数}$, 则上述 $W_1(z)$, $W_2(z)$ 线性相关. 因此, 设

$$W_2(z) = gW_1(z) \ln(z-z_0) + (z-z_0)^{s_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k.$$

- 代入原方程, 得到系数的递推关系及 g 与 b_k 之间的关系, 并由此确定与 $W_1(z)$ 线性无关的第二个特解 $W_2(z)$.

3. 正则奇点领域上的级数解法

- (ii) 若 $s_1 - s_2 = \text{整数}$, 则上述 $W_1(z)$, $W_2(z)$ 线性相关. 因此, 设

$$W_2(z) = gW_1(z) \ln(z-z_0) + (z-z_0)^{s_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k.$$

- 代入原方程, 得到系数的递推关系及 g 与 b_k 之间的关系, 并由此确定与 $W_1(z)$ 线性无关的第二个特解 $W_2(z)$.
- 下面以 Bessel 方程为例, 利用上述三步骤求解.

3.1 非整数阶Bessel方程

非整数阶 ($\nu \neq \text{整数或半奇数}$) Bessel方程:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0.$$

$x_0 = 0$ 是正则奇点!

因为 $p(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$ 是一阶极点,
 $q(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2}$, $x_0 = 0$ 是二阶极点.

3.1 非整数阶Bessel方程

非整数阶 ($\nu \neq \text{整数或半奇数}$) Bessel方程:

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0.$$

$x_0 = 0$ 是正则奇点!

因为 $p(x) = \frac{1}{x}$, $x_0 = 0$ 是一阶极点,
 $q(x) = 1 - \frac{\nu^2}{x^2}$, $x_0 = 0$ 是二阶极点.

● 指标方程:

$$s(s-1) + 1 \cdot s - \nu^2 = 0, \text{ 即 } s^2 - \nu^2 = 0.$$

3.1 非整数阶Bessel方程

- 所以 $s_1 = \nu$, $s_2 = -\nu$, 且要求 $s_1 - s_2 = 2\nu \neq 0$ 或正整数. (若不满足, 则下面两个特解就线性相关.)

3.1 非整数阶Bessel方程

- 所以 $s_1 = \nu$, $s_2 = -\nu$, 且要求 $s_1 - s_2 = 2\nu \neq 0$ 或正整数. (若不满足, 则下面两个特解就线性相关.)
- 所以, 两个线性无关的特解为:

$$y_1(x) = x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k,$$

$$y_2(x) = x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

3.1 非整数阶Bessel方程

- 设特解的一般形式为: $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}$,

3.1 非整数阶Bessel方程

- 设特解的一般形式为: $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s}$,
- 代入Bessel方程, 得

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+s)(k+s-1)a_k x^{k+s-2} + \sum_{k=0}^{\infty} (k+s)a_k x^{k+s-2} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+s} = 0.$$

3.1 非整数阶Bessel方程

● 由 x^{k+s-2} 的系数为零得,

$$(s+k)(s+k-1)a_k + (s+k)a_k + a_{k-2} - \nu^2 a_k = 0.$$

3.1 非整数阶Bessel方程

- 由 x^{k+s-2} 的系数为零得,

$$(s+k)(s+k-1)a_k + (s+k)a_k + a_{k-2} - \nu^2 a_k = 0.$$

- 分析前两个系数 a_0, a_1 :

$$\begin{cases} k=0, & (s^2 - \nu^2)a_0 = 0, & a_0 \neq 0. \\ k=1, & [(s+1)^2 - \nu^2]a_1 = 0, & a_1 = 0. \end{cases}$$

3.1 非整数阶Bessel方程

- 由 x^{k+s-2} 的系数为零得,

$$(s+k)(s+k-1)a_k + (s+k)a_k + a_{k-2} - \nu^2 a_k = 0.$$

- 分析前两个系数 a_0, a_1 :

$$\begin{cases} k=0, & (s^2 - \nu^2)a_0 = 0, & a_0 \neq 0. \\ k=1, & [(s+1)^2 - \nu^2]a_1 = 0, & a_1 = 0. \end{cases}$$

- 所以,系数的递推关系为:

$$a_k = \frac{-1}{(s+k)^2 - \nu^2} a_{k-2} = -\frac{1}{(s+k+\nu)(s+k-\nu)} a_{k-2}.$$

3.1 非整数阶Bessel方程

- 选取 $s_1 = +\nu$, 则

$$a_k = -\frac{1}{k(2\nu + k)} a_{k-2}.$$

3.1 非整数阶Bessel方程

- 选取 $s_1 = +\nu$, 则

$$a_k = -\frac{1}{k(2\nu + k)} a_{k-2}.$$

- 即

$$a_2 = -\frac{1}{2(2\nu + 2)} a_0 = -\frac{1}{1!(\nu + 1)} \frac{1}{2^2} a_0,$$

3.1 非整数阶Bessel方程

● 其他系数为,

$$\begin{aligned}a_4 &= -\frac{1}{4(2\nu+4)}a_2 = -\frac{1}{2(\nu+2)}\frac{1}{2^2}a_2 \\&= +\frac{1}{2!(\nu+1)(\nu+2)}\frac{1}{2^4}a_0, \\&\vdots \\a_{2k} &= (-1)^k \frac{1}{k!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)}\frac{1}{2^{2k}}a_0.\end{aligned}$$

3.1 非整数阶Bessel方程

● 因为

$$a_1 = 0,$$

3.1 非整数阶Bessel方程

● 因为

$$a_1 = 0,$$

● 所以

$$a_3 = 0 \rightarrow a_5 = 0 \rightarrow \cdots a_{2k+1} = 0.$$

3.1 非整数阶Bessel方程

- 所以, ν 阶Bessel方程的一个特解是

$$\begin{aligned} y_1(x) = & a_0 x^\nu \left[1 - \frac{1}{1!(\nu+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \right. \\ & + \frac{1}{2!(\nu+1)(\nu+2)} \left(\frac{x}{2}\right)^4 - \cdots \\ & + (-1)^k \frac{1}{k!(\nu+1)(\nu+2)\cdots(\nu+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ & \left. + \cdots \right]. \end{aligned}$$

3.1 非整数阶Bessel方程

● 收敛半径

$$R = \sqrt{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k-2}}{a_k} \right|} = \sqrt{\lim_{k \rightarrow \infty} 2^2 k(2\nu + k)} = \infty.$$

3.1 非整数阶Bessel方程

- 收敛半径

$$R = \sqrt{\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{k-2}}{a_k} \right|} = \sqrt{\lim_{k \rightarrow \infty} 2^2 k(2\nu + k)} = \infty.$$

- 全区域收敛!

3.1 非整数阶Bessel方程

- 若选取⁶⁴

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)},$$

⁶⁴ Γ 函数定义见 p.413 附录十三.

3.1 非整数阶Bessel方程

- 若选取⁶⁴

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)},$$

- 解可表示为

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}.$$

这就是 ν 阶 Bessel 函数.

⁶⁴ Γ 函数定义见 p.413 附录十三.

3.1 非整数阶Bessel方程

- 同理, 若选取 $s_2 = -\nu$, 则 ν 阶 Bessel 方程的另一个特解为

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}.$$

3.1 非整数阶Bessel方程

- 同理, 若选取 $s_2 = -\nu$, 则 ν 阶 Bessel 方程的另一个特解为

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}.$$

- 所以, ν 阶 Bessel 方程的通解为

$$y(x) = C_1 J_{\nu}(x) + C_2 J_{-\nu}(x).$$

3.1 非整数阶Bessel方程

- 若选 ν 阶Neumann函数

$$N_\nu(x) = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}$$

为第二个特解, 则 ν 阶Bessel方程的通解可写成

$$y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 N_\nu(x).$$

3.2 半奇数阶Bessel方程

半奇数 $(l + \frac{1}{2})$ 阶Bessel方程, 即球Bessel方程:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \left[x^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] y = 0.$$

3.2 半奇数阶Bessel方程

半奇数 $(l + \frac{1}{2})$ 阶Bessel方程, 即球Bessel方程:

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \left[x^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] y = 0.$$

- 来源于Helmholtz方程在球坐标系中分离变量的 $R(r)$ 部分.

3.2 半奇数阶Bessel方程

- 先考虑特殊情况 $l = 0$, 则 $\frac{1}{2}$ 阶Bessel方程为,

$$x^2 y'' + xy' + \left[x^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] y = 0.$$

3.2 半奇数阶Bessel方程

- 先考虑特殊情况 $l = 0$, 则 $\frac{1}{2}$ 阶Bessel方程为,

$$x^2 y'' + xy' + \left[x^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right] y = 0.$$

- 指标方程:

$$s^2 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 = 0 \implies s_1 = \frac{1}{2}, s_2 = -\frac{1}{2}.$$

3.2 半奇数阶Bessel方程

- 显然, 方程的一个特解是 $\frac{1}{2}$ 阶Bessel函数,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(k + \frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}.$$

3.2 半奇数阶Bessel方程

- 显然, 方程的一个特解是 $\frac{1}{2}$ 阶Bessel函数,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(k + \frac{3}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}+2k}.$$

- 利用 Γ 函数的性质, 可化简上述方程为,

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

3.2 半奇数阶Bessel方程

- 由于 $s_1 - s_2 = 1$ (整数),

⁶⁵参见书 $p.197$.

3.2 半奇数阶Bessel方程

- 由于 $s_1 - s_2 = 1$ (整数),
● 所以第二个特解应取为⁶⁵

$$y_2(x) = AJ_{\frac{1}{2}}(x) \ln x + x^{-\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

⁶⁵参见书 p.197.

3.2 半奇数阶Bessel方程

- 为了定出系数 A 和 $\{b_k\}$, 将 $y_2(x)$ 代入 $\frac{1}{2}$ 阶Bessel方程,

$$\begin{aligned} & A \left[x^2 J_{\frac{1}{2}}'' + x J_{\frac{1}{2}}' + \left(x^2 - \frac{1}{4} \right) J_{\frac{1}{2}} \right] \ln x + 2Ax J_{\frac{1}{2}}' \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2} \right) \left(k - \frac{3}{2} \right) b_k x^{k-\frac{1}{2}} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(k - \frac{1}{2} \right) b_k x^{k-\frac{1}{2}} \\ & + \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^{k+\frac{3}{2}} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{4} b_k x^{k-\frac{1}{2}} = 0. \end{aligned}$$

3.2 半奇数阶Bessel方程

- 上式第一项的中括号等于零(为什么?).

⁶⁶详见书p.202.

3.2 半奇数阶Bessel方程

- 上式第一项的中括号等于零(为什么?).
- 比较各幂次项 ($x^{-\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{3}{2}}, \dots$) 的系数得⁶⁶

$$A = 0,$$

$$b_1 = 0,$$

$$b_0 \quad \text{任意.}$$

⁶⁶详见书p.202.

3.2 半奇数阶Bessel方程

● 所以, 递推关系为:

$$\begin{aligned}b_2 &= -\frac{1}{2}b_0, \\b_4 &= -\frac{1}{4 \times 3}b_2 = \frac{1}{4!}b_0, \\b_6 &= -\frac{1}{6 \times 5}b_4 = -\frac{1}{6!}b_0, \\&\vdots\end{aligned}$$

3.2 半奇数阶Bessel方程

● 而 $b_3 = b_5 = \cdots = 0$,

3.2 半奇数阶Bessel方程

- 而 $b_3 = b_5 = \cdots = 0$,
- 所以第二个特解是,

$$\begin{aligned} y_2(x) &= b_0 x^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{1}{6!} x^6 + \cdots \right) \\ &= b_0 \frac{1}{\sqrt{x}} \cos x. \end{aligned}$$

3.2 半奇数阶Bessel方程

- 若取 $b_0 = \sqrt{2/\pi}$, 则

$$y_2(x) = J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

3.2 半奇数阶Bessel方程

- 若取 $b_0 = \sqrt{2/\pi}$, 则

$$y_2(x) = J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

- 所以, $\frac{1}{2}$ 阶Bessel方程的通解为,

$$y(x) = C_1 J_{\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{-\frac{1}{2}}(x).$$

3.2 半奇数阶Bessel方程

- 同理，对 $(l + \frac{1}{2})$ 阶Bessel方程，其通解为

$$y(x) = C_1 J_{l+\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{-(l+\frac{1}{2})}(x),$$

3.2 半奇数阶Bessel方程

- 同理，对 $(l + \frac{1}{2})$ 阶Bessel方程，其通解为

$$y(x) = C_1 J_{l+\frac{1}{2}}(x) + C_2 J_{-(l+\frac{1}{2})}(x),$$

- 其中，

$$J_{l+\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(l + \frac{1}{2} + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{l+\frac{1}{2}+2k},$$

$$J_{-(l+\frac{1}{2})}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(-l - \frac{1}{2} + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-l-\frac{1}{2}+2k}.$$

3.3 整数 m 阶Bessel方程

整数 m 阶Bessel方程:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0,$$

其中 m 为自然数.

3.3 整数 m 阶Bessel方程

整数 m 阶Bessel方程:

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - m^2)y = 0,$$

其中 m 为自然数.

- 来源于Helmholtz方程在柱坐标系中分离变量的 $R(\rho)$.

3.3 整数 m 阶Bessel方程

● 指标方程

$$s^2 - m^2 = 0 \implies s_1 = m, s_2 = -m.$$

3.3 整数 m 阶Bessel方程

● 指标方程

$$s^2 - m^2 = 0 \implies s_1 = m, s_2 = -m.$$

● 对 $s_1 = m$, 特解是 m 阶Bessel函数.

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!(m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k},$$

其中利用了 $\Gamma(m+k+1) = (m+k)!$.

3.3 整数 m 阶Bessel方程

- 对应于 $s_2 = -m$, 其特解不是 $J_{-m}(x)$, 因为 $J_{-m}(x)$ 与 $J_m(x)$ 线性相关.

3.3 整数 m 阶Bessel方程

- 对应于 $s_2 = -m$, 其特解不是 $J_{-m}(x)$, 因为 $J_{-m}(x)$ 与 $J_m(x)$ 线性相关.
- 下面证明之.

$$J_{-m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(-m + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k}.$$

3.3 整数 m 阶Bessel方程

● Γ 函数性质:

若 $k < m$, 即 $-m + k + 1 \leq 0$, 则 $\Gamma \rightarrow \infty$.
所以 $J_{-m}(x)$ 中求和从 $k = m$ 开始才不为零.

$$J_{-m}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(-m + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k}.$$

3.3 整数 m 阶Bessel方程

● 令 $l = k - m$, $l = 0, 1, 2, \dots$, 则

$$\begin{aligned} J_{-m}(x) &= \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^{l+m} \frac{1}{(l+m)! \Gamma(l+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2l} \\ &= (-1)^m \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \frac{1}{(l+m)! l!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2l} \\ &= (-1)^m J_m(x). \end{aligned}$$

所以, $J_{-m}(x)$ 不是第二个特解.

3.3 整数 m 阶Bessel方程

- 选取 m 阶Neumann函数⁶⁷

$$N_m(x) = \lim_{\nu \rightarrow m} \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}.$$

作为第二个特解!

⁶⁷详见书 p.402 附录七.

3.3 整数 m 阶Bessel方程

- 选取 m 阶Neumann函数⁶⁷

$$N_m(x) = \lim_{\nu \rightarrow m} \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}.$$

作为第二个特解!

- 所以对 m 阶Bessel方程, 其通解为

$$y(x) = C_1 J_m(x) + C_2 N_m(x).$$

⁶⁷详见书 p.402 附录七.

3.3 整数 m 阶Bessel方程

● 零点性质：

当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 ($\nu > 0$):

$$\begin{cases} J_0(x) \rightarrow 1, & J_\nu(x) \rightarrow 0, & J_{-\nu}(x) \rightarrow \infty, \\ N_\nu(x) \rightarrow \pm\infty, & N_m(x) \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

3.3 整数 m 阶Bessel方程

- 零点性质：

当 $x \rightarrow 0$ 时, 有 ($\nu > 0$):

$$\begin{cases} J_0(x) \rightarrow 1, & J_\nu(x) \rightarrow 0, & J_{-\nu}(x) \rightarrow \infty, \\ N_\nu(x) \rightarrow \pm\infty, & N_m(x) \rightarrow -\infty, \end{cases}$$

- 此性质 $\implies x = 0$ 处的自然边界条件.

3.3 整数 m 阶Bessel方程

- 对包含 $x = 0$ 的区域, 排除发散解:

$$N_0(x), N_m(x), J_{-v}(x), N_v(x),$$

3.3 整数 m 阶Bessel方程

- 对包含 $x = 0$ 的区域, 排除发散解:

$$N_0(x), N_m(x), J_{-v}(x), N_v(x),$$

- 而只保留有限解:

$$J_0(x), J_m(x), J_v(x).$$

3.3 整数 m 阶Bessel方程

- 对包含 $x = 0$ 的区域, 排除发散解:

$$N_0(x), N_m(x), J_{-v}(x), N_v(x),$$

- 而只保留有限解:

$$J_0(x), J_m(x), J_v(x).$$

- 下章将举例说明.

3.4 虚宗量Bessel方程

(1) ν 阶虚宗量Bessel方程,

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} - (x^2 + \nu^2) R = 0,$$

其中 $\nu \neq$ 整数, 半奇数.

3.4 虚宗量Bessel方程

- 设 $\xi = ix$, 则

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dR}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = i \frac{dR}{d\xi},$$

上式方程变成 ν 阶Bessel方程,

$$\xi^2 \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \xi \frac{dR}{d\xi} + (\xi^2 - \nu^2) R = 0,$$

3.4 虚宗量Bessel方程

- 设 $\xi = ix$, 则

$$\frac{dR}{dx} = \frac{dR}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = i \frac{dR}{d\xi},$$

上式方程变成 ν 阶Bessel方程,

$$\xi^2 \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \xi \frac{dR}{d\xi} + (\xi^2 - \nu^2) R = 0,$$

- 它的解为 $J_\nu(\xi)$ 和 $J_{-\nu}(\xi)$ 或 $N_\nu(\xi)$,

3.4 虚宗量Bessel方程

● 即

$$J_\nu(\xi) = J_\nu(ix) = i^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k},$$

$$J_{-\nu}(\xi) = J_{-\nu}(ix) = i^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k},$$

3.4 虚宗量Bessel方程

● 即

$$J_{\nu}(\xi) = J_{\nu}(ix) = i^{\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k},$$

$$J_{-\nu}(\xi) = J_{-\nu}(ix) = i^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k},$$

● 或

$$N_{\nu}(\xi) = N_{\nu}(ix) = \frac{J_{\nu}(ix) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(ix)}{\sin \nu\pi}.$$

3.4 虚宗量Bessel方程

- 由于 $J_\nu(\xi)$, $J_{-\nu}(\xi)$ 和 $N_\nu(\xi)$ 中含 i , 使用不便. 为此, 引入下面的实函数, 称为虚宗量Bessel函数:

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k},$$

$$I_{-\nu}(x) = i^\nu J_{-\nu}(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(-\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}.$$

3.4 虚宗量Bessel方程

- 所以, ν 阶虚宗量Bessel方程的解为,

$$C_1 I_\nu(x) + C_2 I_{-\nu}(x).$$

3.4 虚宗量Bessel方程

(2) 整数 m 阶虚宗量Bessel方程

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} - (x^2 + m^2) R = 0,$$

其中 m 为整数.

3.4 虚宗量Bessel方程

(2) 整数 m 阶虚宗量Bessel方程

$$x^2 \frac{d^2 R}{dx^2} + x \frac{dR}{dx} - (x^2 + m^2) R = 0,$$

其中 m 为整数.

- 来源于Laplace方程在柱坐标中分离变量的 $R(\rho)$ 部分.

3.4 虚宗量Bessel方程

- 同上, 令 $\xi = ix$, 则化成 m 阶 Bessel 方程:

$$\xi^2 \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \xi \frac{dR}{d\xi} + (\xi^2 - m^2) R = 0.$$

3.4 虚宗量Bessel方程

- 同上, 令 $\xi = ix$, 则化成 m 阶 Bessel 方程:

$$\xi^2 \frac{d^2 R}{d\xi^2} + \xi \frac{dR}{d\xi} + (\xi^2 - m^2) R = 0.$$

- 指标方程

$$s^2 - m^2 = 0 \implies s_1 = m, s_2 = -m.$$

3.4 虚宗量Bessel方程

- 对应 $s_1 = m$ 的特解为虚宗量Bessel函数,

$$I_m(x) = i^{-m} J_m(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}.$$

3.4 虚宗量Bessel方程

- 对应 $s_1 = m$ 的特解为虚宗量Bessel函数,

$$I_m(x) = i^{-m} J_m(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}.$$

- 对应 $s_2 = -m$ 的特解选虚宗量的Hankel函数,

$$K_m(x) = \lim_{\nu \rightarrow m} \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_{\nu}(x)}{\sin \nu \pi}.$$

3.4 虚宗量Bessel方程

- 对应 $s_1 = m$ 的特解为虚宗量Bessel函数,

$$I_m(x) = i^{-m} J_m(ix) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!(m+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}.$$

- 对应 $s_2 = -m$ 的特解选虚宗量的Hankel函数,

$$K_m(x) = \lim_{\nu \rightarrow m} \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_{\nu}(x)}{\sin \nu \pi}.$$

- 所以, m 阶Bessel方程的解为,

$$C_1 I_m(x) + C_2 K_m(x).$$

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 轴对称球函数

2. 一般球函数

球函数

第十三章、球函数

1.1 轴对称球函数的级数表达式

Laplace方程在球坐标系中分离变量

$$\nabla^2 u = 0$$

1.1 轴对称球函数的级数表达式

Laplace方程在球坐标系中分离变量

$$\nabla^2 u = 0$$

● 令 $u(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$,

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - l(l+1)R = 0,$$

$$\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial^2 Y}{\partial \varphi^2} + \sin^2 \theta l(l+1)Y = 0,$$

其中, $R(r) : r^l, r^{-(l+1)}$.

1.1 轴对称球函数的级数表达式

● 令 $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, 得到

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) : \cos m\varphi, \sin m\varphi,$$

1.1 轴对称球函数的级数表达式

- 令 $Y(\theta, \varphi) = \Theta(\theta)\Phi(\varphi)$, 得到

$$\Phi'' + m^2\Phi = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) : \cos m\varphi, \sin m\varphi,$$

- 并且,

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0,$$

其中 $x = \cos \theta$. 此即为缔合Legendre 方程.

1.1 轴对称球函数的级数表达式

- 轴对称情形： $m = 0$,

$$(1 - x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + l(l + 1) \Theta = 0.$$

1.1 轴对称球函数的级数表达式

- 轴对称情形： $m = 0$,

$$(1 - x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + l(l+1)\Theta = 0.$$

- 由常点领域的级数解法，得

$$\Theta(\theta) = P_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k},$$

1.1 轴对称球函数的级数表达式

- 轴对称情形: $m = 0$,

$$(1 - x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + l(l+1)\Theta = 0.$$

- 由常点领域的级数解法, 得

$$\Theta(\theta) = P_l(x) = \sum_{k=0}^{[l/2]} (-1)^k \frac{(2l-2k)!}{2^l k!(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k},$$

- 所以, $Y(\theta, \varphi) = \text{常数} \times P_l(\cos \theta)$, 称 $Y(\theta, \varphi)$ 或 $P_l(\cos \theta)$ (Legendre 多项式) 为轴对称球函数.

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

• 证明微分式：

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l.$$

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

● 证明微分式：

$$P_l(x) = \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l.$$

● 证明：利用二项式展开公式，

$$(x^2 - 1)^l = \sum_{k=0}^l \frac{l!}{k!(l-k)!} (x^2)^{l-k} (-1)^k,$$

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

- 将上式微分 l 次, 并除以 $2^l l!$, 则有,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \\ &= \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{1}{2^l l!} \frac{l!}{k!(l-k)!} (-1)^k \\ & \quad \times (2l - 2k)(2l - 2k - 1) \cdots (2l - 2k - l + 1) x^{l-2k}, \end{aligned}$$

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

- 将上式微分 l 次, 并除以 $2^l l!$, 则有,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \\ &= \sum_{k=0}^{[l/2]} \frac{1}{2^l l!} \frac{l!}{k!(l-k)!} (-1)^k \\ & \quad \times (2l-2k)(2l-2k-1) \cdots (2l-2k-l+1) x^{l-2k}, \end{aligned}$$

- 考虑到 $l-2k < 0$, 即 $k > \frac{l}{2}$ 项不存在(等于零), 因此上式的求和最大到 $[l/2]$.

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

● 所以,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2^l l!} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \\ &= \sum_{k=0}^{[l/2]} (-1)^k \frac{(2l - 2k)!}{2^l k!(l - k)!(l - 2k)!} x^{l-2k} \\ &= P_l(x). \end{aligned}$$

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

• 证明积分式：

$$P_l(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos \theta + i \sin \theta \cos \psi]^l d\psi.$$

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

● 证明积分式：

$$P_l(\cos \theta) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi [\cos \theta + i \sin \theta \cos \psi]^l d\psi.$$

● 证明：Cauchy积分公式为，

$$f^{(l)}(z_0) = \frac{l!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{l+1}} dz.$$

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

● 取 $f(x) = (x^2 - 1)^l$, 则 $f^{(l)}(x) = \frac{d^l}{dx^l}(x^2 - 1)^l$,

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

- 取 $f(x) = (x^2 - 1)^l$, 则 $f^{(l)}(x) = \frac{d^l}{dx^l}(x^2 - 1)^l$,
- 因此,

$$f^{(l)}(x) = \frac{l!}{2\pi i} \oint_C \frac{(z^2 - 1)^l}{(z - x)^{l+1}} dz,$$

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

- 取 $f(x) = (x^2 - 1)^l$, 则 $f^{(l)}(x) = \frac{d^l}{dx^l}(x^2 - 1)^l$,
- 因此,

$$f^{(l)}(x) = \frac{l!}{2\pi i} \oint_C \frac{(z^2 - 1)^l}{(z - x)^{l+1}} dz,$$

- 即,

$$P_l(x) = \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{2^l} \oint_C \frac{(z^2 - 1)^l}{(z - x)^{l+1}} dz.$$

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

选取特定路径 C , x 为圆心, $\sqrt{1-x^2}$ 为半径的圆, 即

$$z - x = \sqrt{x^2 - 1}e^{i\psi}, \quad \psi \in [-\pi, +\pi],$$

$$dz = i\sqrt{x^2 - 1}e^{i\psi}d\psi.$$

将它们代入Cauchy积分公式, 可得:

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

$$\begin{aligned} & P_l(x) \\ = & \frac{1}{2\pi i 2^l} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{[(x + \sqrt{x^2 - 1} e^{i\psi})^2 - 1]^l}{(\sqrt{x^2 - 1} e^{i\psi})^{l+1}} i \sqrt{x^2 - 1} e^{i\psi} d\psi \\ = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{x^2 + 2x \sqrt{x^2 - 1} e^{i\psi} + (x^2 - 1) e^{i2\psi} - 1}{2 \sqrt{x^2 - 1} e^{i\psi}} \right]^l d\psi \\ = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{2x \sqrt{x^2 - 1} e^{i\psi} + (x^2 - 1) e^{i\psi} (e^{i\psi} + e^{-i\psi})}{2 \sqrt{x^2 - 1} e^{i\psi}} \right]^l d\psi \end{aligned}$$

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

$$\begin{aligned}P_l(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left[x + \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 1} (e^{i\psi} + e^{-i\psi}) \right]^l d\psi \\&= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left[x + \frac{1}{2} \sqrt{x^2 - 1} (e^{i\psi} + e^{-i\psi}) \right]^l d\psi.\end{aligned}$$

最后一步利用了 ψ 的偶函数积分. 所以,

$$P_l(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos \theta + i \sin \theta \cos \psi]^l d\psi.$$

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

由积分表示可得如下推论：

- (i) $|P_l(x)| \leq 1$.

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

由积分表示可得如下推论：

- (i) $|P_l(x)| \leq 1$.
- (ii) $P_l(1) = 1$.

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

由积分表示可得如下推论：

- (i) $|P_l(x)| \leq 1$.
- (ii) $P_l(1) = 1$.
- (iii) $P_l(-1) = (-1)^l$.

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

由积分表示可得如下推论：

- (i) $|P_l(x)| \leq 1$.
- (ii) $P_l(1) = 1$.
- (iii) $P_l(-1) = (-1)^l$.
- (iv) $P_l(-x) = (-1)^l P_l(x)$.

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

● (i) $|P_l(x)| \leq 1$.

$$\begin{aligned}\text{证明: } |P_l(x)| &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi |\cos \theta + i \sin \theta \cos \psi|^l d\psi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta \cos^2 \psi)^{l/2} d\psi \\ &\leq \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta)^{l/2} d\psi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\psi = 1.\end{aligned}$$

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

- (ii) $P_l(1) = 1$.

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

- (ii) $P_l(1) = 1$.
- 证明: $x = 1$ 即 $\theta = 0$, 所以

$$P_l(1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi 1 \cdot d\psi = 1.$$

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

- (iii) $P_l(-1) = (-1)^l$.

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

- (iii) $P_l(-1) = (-1)^l$.
- 证明: $x = -1$, 即 $\theta = \pi$, 所以

$$P_l(-1) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (-1)^l \cdot d\psi = (-1)^l.$$

1.2 轴对称球函数的微分式和积分式

- (iv) 由微分式可得：

$$P_l(-x) = (-1)^l P_l(x).$$

1.3 $P_l(x)$ 的正交性、完备性及广义 $Fourier$ 展开

1.3.1 $P_l(x)$ 的正交性

$$\int_{-1}^1 P_l(x)P_k(x)dx = 0, \text{ 当 } l \neq k.$$

1.3.1 $P_l(x)$ 的正交性

● 证明:

由 $P_l(x)$ 满足的方程(*Legendre*方程)出发,

$$(1-x^2)\frac{d^2 P_l}{dx^2} - 2x\frac{dP_l}{dx} + l(l+1)P_l = 0, \quad (1)$$

$$(1-x^2)\frac{d^2 P_k}{dx^2} - 2x\frac{dP_k}{dx} + k(k+1)P_k = 0. \quad (2)$$

1.3.1 $P_l(x)$ 的正交性

● 证明:

由 $P_l(x)$ 满足的方程(*Legendre*方程)出发,

$$(1-x^2)\frac{d^2P_l}{dx^2} - 2x\frac{dP_l}{dx} + l(l+1)P_l = 0, \quad (1)$$

$$(1-x^2)\frac{d^2P_k}{dx^2} - 2x\frac{dP_k}{dx} + k(k+1)P_k = 0. \quad (2)$$

● 由(1) $\times P_k - (2) \times P_l = 0$, 得:

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2)(P_k P'_l - P_l P'_k) \right] = [k(k+1) - l(l+1)] P_l P_k,$$

1.3.1 $P_l(x)$ 的正交性

● 积分:

$$\begin{aligned}\text{左端} &= \int_{-1}^1 dx \frac{d}{dx} [(1-x^2)(P_k P'_l - P_l P'_k)] \\ &= (1-x^2)(P_k P'_l - P_l P'_k) \Big|_{-1}^1 = 0.\end{aligned}$$

$$\text{右端} = [k(k+1) - l(l+1)] \int_{-1}^1 P_l P_k dx.$$

1.3.1 $P_l(x)$ 的正交性

● 积分：

$$\begin{aligned}\text{左端} &= \int_{-1}^1 dx \frac{d}{dx} [(1-x^2)(P_k P'_l - P_l P'_k)] \\ &= (1-x^2)(P_k P'_l - P_l P'_k) \Big|_{-1}^1 = 0.\end{aligned}$$

$$\text{右端} = [k(k+1) - l(l+1)] \int_{-1}^1 P_l P_k dx.$$

● 若 $k \neq l$ ，则必有： $\int_{-1}^1 P_l(x) P_k(x) dx = 0$.

1.3 $P_l(x)$ 的正交性、完备性及广义 $Fourier$ 展开

1.3.2 $P_l(x)$ 的模 N_l

$$N_l^2 \equiv \int_{-1}^1 P_l(x)P_l(x)dx.$$

1.3 $P_l(x)$ 的正交性、完备性及广义 $Fourier$ 展开

1.3.2 $P_l(x)$ 的模 N_l

$$N_l^2 \equiv \int_{-1}^1 P_l(x)P_l(x)dx.$$

- 可以证明, $N_l = \sqrt{2/(2l+1)}$.

1.3.2 $P_l(x)$ 的模 N_l

证明:

$$\begin{aligned} N_l^2 &= \left(\frac{1}{2^l l!} \right)^2 \int_{-1}^1 \left[\frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{2^{2l} (l!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \cdot d \left[\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l \right] \end{aligned}$$

下面采用分部积分法. 注意带有上下限的项均为零.

1.3.2 $P_l(x)$ 的模 N_l

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \frac{d^l}{dx^l} (x^2 - 1)^l \cdot \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l \Big|_{-1}^1 \\ &\quad - \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}} (x^2 - 1)^l \cdot \frac{d^{l+1}}{dx^{l+1}} (x^2 - 1)^l dx \\ (l\text{次后}) \quad &= \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} (-1)^l \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^l \cdot \frac{d^{2l}}{dx^{2l}} (x^2 - 1)^l dx \\ &= \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} (-1)^l (2l)! \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^l dx. \end{aligned}$$

1.3.2 $P_l(x)$ 的模 N_l

$$\begin{aligned}\text{令 } I &= \int_{-1}^1 (x^2 - 1)^l dx = \int_{-1}^{+1} (x - 1)^l (x + 1)^l dx \\ &= \int_{-1}^1 \frac{1}{l+1} (x - 1)^l d(x + 1)^{l+1} \\ &= \frac{1}{l+1} (x - 1)^l (x + 1)^{l+1} \Big|_{-1}^1 \\ &\quad - \frac{1}{l+1} \int_{-1}^1 (x + 1)^{l+1} l (x - 1)^{l-1} dx\end{aligned}$$

1.3.2 $P_l(x)$ 的模 N_l

$$\begin{aligned} &= -\frac{l}{l+1} \int_{-1}^1 (x-1)^{l-1} (x+1)^{l+1} dx \\ &= -\frac{l}{l+1} \frac{1}{l+2} \int_{-1}^1 (x-1)^{l-1} d(x+1)^{l+2} \\ &= -\frac{l}{l+1} \frac{1}{l+2} (x-1)^{l-1} (x+1)^{l+2} \Big|_{-1}^1 \\ &\quad + \frac{l}{l+1} \frac{l-1}{l+2} \int_{-1}^1 (x+1)^{l+2} (x-1)^{l-2} dx \end{aligned}$$

1.3.2 $P_l(x)$ 的模 N_l

$$\begin{aligned} & (l\text{次后}) \\ &= (-1)^l \frac{l}{l+1} \frac{l-1}{l+2} \\ & \quad \cdots \frac{2}{l+l-1} \frac{1}{2l} \int_{-1}^1 (x+1)^{2l} (x-1)^0 dx \\ &= (-1)^l \frac{(l!)^2}{(2l)!} \frac{1}{2l+1} \int_{-1}^1 d(x+1)^{2l+1} \end{aligned}$$

1.3.2 $P_l(x)$ 的模 N_l

$$\begin{aligned} &= (-1)^l \frac{(l!)^2}{(2l)!} \frac{1}{2l+1} (x+1)^{2l+1} \Big|_{-1}^1 \\ &= (-1)^l \frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l)!} \frac{2}{2l+1}. \end{aligned}$$

1.3.2 $P_l(x)$ 的模 N_l

$$\begin{aligned} &= (-1)^l \frac{(l!)^2}{(2l)!} \frac{1}{2l+1} (x+1)^{2l+1} \Big|_{-1}^1 \\ &= (-1)^l \frac{2^{2l}(l!)^2}{(2l)!} \frac{2}{2l+1}. \end{aligned}$$

● 所以,

$$N_l^2 = \frac{2}{2l+1}.$$

1.3 $P_l(x)$ 的正交性、完备性及广义 $Fourier$ 展开

1.3.3 $P_l(x)$ 的广义 $Fourier$ 展开

若 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 连续, 则以 $P_l(x)$ 作为基底, 将 $f(x)$ 展开为,

$$f(x) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(x),$$

1.3.3 $P_l(x)$ 的广义Fourier展开

其中, 利用 $P_l(x)$ 的正交性和模公式, 有

$$f_l = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 P_l(x) f(x) dx.$$

1.3.3 $P_l(x)$ 的广义 *Fourier* 展开

- 另一种形式：若 $f(\theta)$ 在 $[0, \pi]$ 连续，则

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(\cos \theta).$$

1.3.3 $P_l(x)$ 的广义 *Fourier* 展开

- 另一种形式：若 $f(\theta)$ 在 $[0, \pi]$ 连续，则

$$f(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l P_l(\cos \theta).$$

- 其中

$$f_l = \frac{2l+1}{2} \int_0^{\pi} f(\theta) P_l(\cos \theta) \sin \theta d\theta.$$

1.4 母函数和递推关系

母函数展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(\cos \theta), & r < 1, \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), & r > 1. \end{cases}$$

1.4 母函数和递推关系

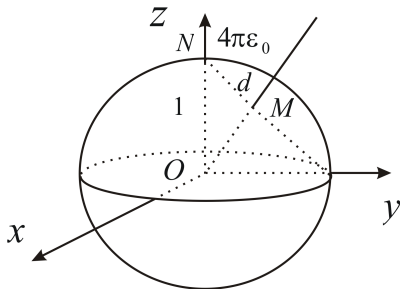
母函数展开式

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(\cos\theta), & r < 1, \\ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos\theta), & r > 1. \end{cases}$$

- 上式左边称为 $Legendre$ 多项式的母函数(生成函数).

1.4 母函数和递推关系

- 求 M 点 (x, y, z) 的电势.



1.4 母函数和递推关系

由坐标变换关系式,

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$N : (0, 0, 1)$$

$$M : (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)$$

1.4 母函数和递推关系

因此， N 到 M 的距离是，

$$\begin{aligned} d &= \sqrt{(r \sin \theta \cos \varphi)^2 + (r \sin \theta \sin \varphi)^2 + (r \cos \theta - 1)^2} \\ &= \sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}. \end{aligned}$$

1.4 母函数和递推关系

- 由库仑定律， M 点的电势为⁶⁸

$$u = \frac{1}{d} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}}$$

⁶⁸轴对称，即与 φ 无关。

1.4 母函数和递推关系

- 由库仑定律， M 点的电势为⁶⁸

$$u = \frac{1}{d} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}}$$

- 另一方面，求解点电荷以外区域的 $Laplace$ 方程 $\nabla^2 u = 0$ ，得

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}) P_l(\cos \theta).$$

⁶⁸轴对称，即与 φ 无关.

1.4 母函数和递推关系

下面分球内($r < 1$)和球外($r > 1$)两种情形讨论.

1.4 母函数和递推关系

情形(i): 球内($r < 1$)

自然边界条件: $r \rightarrow 0$ 时, u 有限 $\Rightarrow B_l = 0$,

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta).$$

1.4 母函数和递推关系

情形(i): 球内($r < 1$)

自然边界条件: $r \rightarrow 0$ 时, u 有限 $\Rightarrow B_l = 0$,

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta).$$

● 因此,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta)$$

1.4 母函数和递推关系

- 当 $\theta = 0$ 时, $P_l(1) = 1$, 则有

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l = \sum_{l=0}^{\infty} r^l.$$

1.4 母函数和递推关系

- 当 $\theta = 0$ 时, $P_l(1) = 1$, 则有

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l = \sum_{l=0}^{\infty} r^l.$$

- 因此, $A_l = 1$.

1.4 母函数和递推关系

- 当 $\theta = 0$ 时, $P_l(1) = 1$, 则有

$$\frac{1}{1-r} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l = \sum_{l=0}^{\infty} r^l.$$

- 因此, $A_l = 1$.
- 故, 当 $r < 1$ 时,

$$\frac{1}{\sqrt{1-2r\cos\theta+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(\cos\theta).$$

1.4 母函数和递推关系

情形(ii): 球外($r > 1$)

自然边界条件: $r \rightarrow \infty$ 时, $u \rightarrow 0 \Rightarrow A_l = 0$,

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta).$$

1.4 母函数和递推关系

情形(ii): 球外($r > 1$)

自然边界条件: $r \rightarrow \infty$ 时, $u \rightarrow 0 \Rightarrow A_l = 0$,

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta).$$

● 因此,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta).$$

1.4 母函数和递推关系

- 仍考虑 $\theta = 0$ 时, $\cos \theta = 1, P_l(1) = 1$.

$$\text{左端} = \frac{1}{r-1} = \frac{1}{r} \frac{1}{1-1/r} = \frac{1}{r} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{1}{r}\right)^l = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}}.$$

$$\text{右端} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}}.$$

1.4 母函数和递推关系

因此, $B_l = 1$. 所以, 当 $r > 1$ 时,

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2r \cos \theta + r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta).$$

同理, 若球的半径为 R , 则母函数关系为

$$\frac{1}{\sqrt{R^2 - 2rR \cos \theta + r^2}} = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{R^{l+1}} r^l P_l(\cos \theta), & (r < R), \\ \sum_{l=0}^{\infty} R^l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta), & (r > R). \end{cases}$$

1.4 母函数和递推关系

练习：自学 $p.237$, 例题6. (此例给出电像法的数学证明)

递推关系：

$$(k+1)P_{k+1}(x) - (2k+1)xP_k(x) + kP_{k-1}(x) = 0,$$

其中 $k \geq 1$. 上式给出不同阶 *Legendre* 多项式之间的关系. 由低阶的 P_{k-1} , P_k 导出高阶的 P_{k+1} . 递推关系可应用于计算一些复杂的定积分.

1.4 母函数和递推关系

● 证明:

由母函数关系式 ($r < 1$):

$$\frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x), \quad (x \equiv \cos \theta)$$

1.4 母函数和递推关系

- 对 r 求导:

$$\frac{x-r}{(1-2rx+r^2)^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} l r^{l-1} P_l(x),$$

1.4 母函数和递推关系

- 对 r 求导:

$$\frac{x-r}{(1-2rx+r^2)^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} l r^{l-1} P_l(x),$$

- 即

$$\frac{x-r}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = (1-2rx+r^2) \sum_{l=0}^{\infty} l r^{l-1} P_l(x).$$

1.4 母函数和递推关系

- 左端再利用一次母函数表达式

$$(x-r) \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x) = (1-2rx+r^2) \sum_{l=0}^{\infty} l r^{l-1} P_l(x).$$

1.4 母函数和递推关系

● 即

$$\begin{aligned} & \sum_{l=0}^{\infty} x P_l(x) r^l - \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x) r^{l+1} \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} l r^{l-1} P_l(x) - \sum_{l=0}^{\infty} 2lx P_l(x) r^l + \sum_{l=0}^{\infty} l P_l(x) r^{l+1}. \end{aligned}$$

1.4 母函数和递推关系

- 对照两端 r 的同幂次项系数，如 r^k 的系数，得

$$\begin{aligned} xP_k(x) - P_{k-1}(x) &= (k+1)P_{k+1}(x) - 2kxP_k(x) \\ &\quad + (k-1)P_{k-1}(x), \end{aligned}$$

1.4 母函数和递推关系

- 对照两端 r 的同幂次项系数，如 r^k 的系数，得

$$xP_k(x) - P_{k-1}(x) = (k+1)P_{k+1}(x) - 2kxP_k(x) + (k-1)P_{k-1}(x),$$

- 即

$$(k+1)P_{k+1}(x) - (2k+1)xP_k(x) + kP_{k-1}(x) = 0,$$

其中 $k \geq 1$. 其余递推公式见 *p.239*.

1.4 母函数和递推关系

例题: 递推关系的应用.

计算 $\int_{-1}^1 x P_k(x) P_l(x) dx$, 其中 k, l 为自然数.

1.4 母函数和递推关系

例题: 递推关系的应用.

计算 $\int_{-1}^1 x P_k(x) P_l(x) dx$, 其中 k, l 为自然数.

● 解:

利用递推公式将 xP_k 化成 P_{k+1} 和 P_{k-1} ,

1.4 母函数和递推关系

$$\begin{aligned}& \int_{-1}^1 x P_k(x) P_l(x) dx \\&= \int_{-1}^1 \frac{1}{2k+1} [(k+1)P_{k+1}(x) + kP_{k-1}(x)] P_l(x) dx \\&= \frac{k+1}{2k+1} \int_{-1}^1 P_{k+1} P_l(x) dx \\& \quad + \frac{k}{2k+1} \int_{-1}^1 P_{k-1}(x) P_l(x) dx\end{aligned}$$

1.4 母函数和递推关系

$$\begin{aligned} &= \frac{k+1}{2k+1} \cdot \frac{2}{2l+1} \delta_{k+1,l} + \frac{k}{2k+1} \cdot \frac{2}{2l+1} \delta_{k-1,l} \\ &= \begin{cases} \frac{2k}{(2k+1)(2k-1)}, & l = k-1, \\ \frac{2(k+1)}{(2k+3)(2k+1)}, & l = k+1, \\ 0, & l \neq k-1, k+1. \end{cases} \end{aligned}$$

第一式利用了正交性和模的性质.

2.1 缔合 $Legendre$ 多项式

缔合 $Legendre$ 多项式

$$Y(\theta, \varphi) = (A \cos m\varphi + B \sin m\varphi)\Theta(\theta).$$

⁶⁹ 此为缔合 $Legendre$ 方程.

2.1 缔合Legendre多项式

缔合Legendre多项式

$$Y(\theta, \varphi) = (A \cos m\varphi + B \sin m\varphi)\Theta(\theta).$$

● 令 $x = \cos \theta$, 则⁶⁹

$$(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta = 0.$$

⁶⁹ 此为缔合Legendre方程.

2.1 缔合Legendre多项式

缔合Legendre多项式

$$Y(\theta, \varphi) = (A \cos m\varphi + B \sin m\varphi)\Theta(\theta).$$

● 令 $x = \cos \theta$, 则⁶⁹

$$(1 - x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2} \right] \Theta = 0.$$

● $x = \pm 1$ 是方程的正则奇点.

⁶⁹ 此为缔合Legendre方程.

2.1 缔合 $Legendre$ 多项式

● 令

$$\Theta(x) = (x-1)^s \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x-1)^k,$$

2.1 缔合 $Legendre$ 多项式

● 令

$$\Theta(x) = (x-1)^s \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x-1)^k,$$

● 代入方程得:

$$s = \pm \frac{m}{2}.$$

2.1 缔合 $Legendre$ 多项式

- 因此，设

$$\Theta(x) = (1 - x^2)^{m/2} y(x).$$

2.1 缔合 $Legendre$ 多项式

- 因此，设

$$\Theta(x) = (1 - x^2)^{m/2} y(x).$$

- 代入缔合 $Legendre$ 方程，得到 $y(x)$ 满足的方程为：

$$(1 - x^2)y'' - 2(m+1)xy' + [l(l+1) - m(m+1)]y = 0. \quad (1)$$

2.1 缔合 $Legendre$ 多项式

- 当 $m = 0$ 时，上述方程退化到 $Legendre$ 方程，

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1)y = 0,$$

其解为 $Legendre$ 多项式 $P_l(x)$.

2.1 缔合 $Legendre$ 多项式

- 当 $m = 0$ 时, 上述方程退化到 $Legendre$ 方程,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1)y = 0,$$

其解为 $Legendre$ 多项式 $P_l(x)$.

- 对 $Legendre$ 方程求 m 阶导数, y 的 m 次导数表示成 $y^{[m]}$, 则得到方程,

$$(1 - x^2)y^{[m]''} - 2(m + 1)xy^{[m]'} + [l(l + 1) - m(m + 1)]y^{[m]} = 0. \quad (2)$$

2.1 缔合 $Legendre$ 多项式

- 比较方程(1)和方程(2), 得

$$y(x) = \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) = P_l^{[m]}(x), \quad (l \geq m)$$

2.1 缔合Legendre多项式

- 比较方程(1)和方程(2), 得

$$y(x) = \frac{d^m}{dx^m} P_l(x) = P_l^{[m]}(x), \quad (l \geq m)$$

- 因此,

$$\begin{aligned} \Theta(x) &= (1-x^2)^{m/2} P_l^{[m]}(x) \\ &= (1-x^2)^{m/2} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} (x^2-1)^l, \quad (l \geq m). \end{aligned}$$

2.1 缔合Legendre多项式

● 或表示成:

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}} (x^2-1)^l, \quad (l \geq m).$$

此为缔合Legendre多项式.

2.1 缔合 $Legendre$ 多项式

- 由缔合 $Legendre$ 方程知, 它关于 $m \rightarrow -m$ 对称, 因此, $P_l^{-m}(x)$ 也是它的解.

2.1 缔合 $Legendre$ 多项式

- 由缔合 $Legendre$ 方程知, 它关于 $m \rightarrow -m$ 对称, 因此, $P_l^{-m}(x)$ 也是它的解.
- 由于有限解只有一个, 因此,

$$P_l^m(x) = CP_l^{-m}(x),$$

2.1 缔合Legendre多项式

● 即,

$$\begin{aligned} C &= \frac{P_l^m(x)}{P_l^{-m}(x)} \\ &= \frac{(1-x^2)^{m/2} \frac{d^{m+l}}{dx^{m+l}}(x^2-1)^l}{(1-x^2)^{-m/2} \frac{d^{-m+l}}{dx^{-m+l}}(x^2-1)^l}, \end{aligned}$$

2.1 缔合Legendre多项式

- 只取分子与分母的最高次幂之比(为什么?), 得:

$$\begin{aligned} C &= \frac{(-1)^m x^{2m} \frac{(2l)!}{(l-m)!} x^{l-m}}{\frac{(2l)!}{(l+m)!} x^{l+m}} \\ &= (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!}. \quad (\text{常数!}) \end{aligned}$$

2.1 缔合 $Legendre$ 多项式

● 因此,

$$P_l^m(x) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_l^{-m}(x),$$

2.1 缔合Legendre多项式

● 因此,

$$P_l^m(x) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_l^{-m}(x),$$

● 或

$$P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x).$$

2.1 缔合 $Legendre$ 多项式

- 缔合 $Legendre$ 多项式的性质.

2.1 缔合Legendre多项式

● 缔合Legendre多项式的性质.

性质1 微分表示

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{1}{2^l l!} \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2-1)^l, \quad (m \leq l)$$

2.1 缔合Legendre多项式

● 并且

$$\begin{cases} P_l^m(x) = (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} P_l^{-m}(x), \\ P_l^{-m}(x) = (-1)^m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} P_l^m(x). \end{cases}$$

2.1 缔合Legendre多项式

性质2 积分表示

从它的微分表示出发, 利用Cauchy积分公式, 得

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{1}{2^l l!} \frac{(l+m)!}{2\pi i} \oint_C \frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+m+1}} dz.$$

2.1 缔合Legendre多项式

性质2 积分表示

从它的微分表示出发, 利用Cauchy积分公式, 得

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{1}{2^l l!} \frac{(l+m)!}{2\pi i} \oint_C \frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+m+1}} dz.$$

- 选取 C : $z-x = \sqrt{x^2-1}e^{i\psi}$, $\psi \in [-\pi, \pi]$.

2.1 缔合Legendre多项式

性质2 积分表示

从它的微分表示出发, 利用Cauchy积分公式, 得

$$P_l^m(x) = (1-x^2)^{m/2} \frac{1}{2^l l!} \frac{(l+m)!}{2\pi i} \oint_C \frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+m+1}} dz.$$

- 选取 C : $z-x = \sqrt{x^2-1}e^{i\psi}$, $\psi \in [-\pi, \pi]$.
- 利用 $(1-x^2)^{1/2} = i\sqrt{x^2-1} = i(z-x)/e^{i\psi}$,
 $dz = i\sqrt{x^2-1}e^{i\psi}d\psi$,

2.1 缔合Legendre多项式

化简上述积分,

$$\begin{aligned}P_l^m(x) &= \frac{1}{2\pi i} \frac{(l+m)!}{2^l l!} \oint_C \left(i \frac{z-x}{e^{i\psi}} \right)^m \frac{(z^2-1)^l}{(z-x)^{l+m+1}} dz \\&= \frac{i^m}{2\pi} \frac{(l+m)!}{l!} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\psi} \left[x + \sqrt{x^2-1} \frac{1}{2}(e^{-i\psi} + e^{i\psi}) \right]^l d\psi \\&= \frac{i^m}{2\pi} \frac{(l+m)!}{l!} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-im\psi} [\cos \theta + i \sin \theta \cos \psi]^l d\psi.\end{aligned}$$

2.1 缔合Legendre多项式

性质3 正交关系(I)

相同 m 而不同 l 阶的函数在 $[-1, 1]$ 上正交, 即

$$\int_{-1}^1 P_k^m(x) P_l^m(x) dx = 0, \quad (k \neq l)$$

或

$$\int_0^\pi P_k^m(\cos \theta) P_l^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0. \quad (k \neq l)$$

2.1 缔合Legendre多项式

性质3 正交关系(II)

相同 l 而不同 m 阶的函数在 $[-1, 1]$ 上正交, 即

$$\int_{-1}^1 P_l^m(x) P_l^n(x) dx = 0, \quad (|m| \neq |n|)$$

或

$$\int_0^\pi P_l^m(\cos \theta) P_l^n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0. \quad (|m| \neq |n|)$$

2.1 缔合 $Legendre$ 多项式

证明过程见书 $p.212$, $Sturm - Livouille$ 本征值问题的讨论!

2.1 缔合Legendre多项式

性质4 模

$$\begin{aligned}(N_l^m)^2 &= \int_{-1}^1 [P_l^m(x)]^2 dx \\&= (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \int_{-1}^1 P_l^{-m}(x) P_l^m(x) dx \\&= (-1)^m \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{1}{2^{2l}(l!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^{l-m}}{dx^{l-m}} (x^2 - 1)^l \\&\quad \cdot \frac{d^{l+m}}{dx^{l+m}} (x^2 - 1)^l dx.\end{aligned}$$

2.1 缔合 $Legendre$ 多项式

按照计算 $(N_l)^2$ 的过程, 多次分部积分后得:

$$(N_l^m)^2 = \frac{(l+m)!}{(l-m)!} \frac{2}{2l+1}.$$

2.1 缔合Legendre多项式

性质5 广义Fourier展开(I)

若 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续, 则^a

$$\begin{cases} f(x) = \sum_{l=m}^{\infty} f_l P_l^m(x), \\ f_l = \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_{-1}^1 f(x) P_l^m(x) dx. \end{cases}$$

^a利用了正交性和模公式

2.1 缔合Legendre多项式

性质5 广义Fourier展开(II)

若 $f(\theta)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 则

$$\begin{cases} f(\theta) = \sum_{l=m}^{\infty} f_l P_l^m(\cos \theta), \\ f_l = \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^{\pi} f(\theta) P_l^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \end{cases}$$

2.1 缔合Legendre多项式

性质5 广义Fourier展开(II)

若 $f(\theta)$ 在 $[0, \pi]$ 上连续, 则

$$\begin{cases} f(\theta) = \sum_{l=m}^{\infty} f_l P_l^m(\cos \theta), \\ f_l = \frac{2l+1}{2} \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \int_0^{\pi} f(\theta) P_l^m(\cos \theta) \sin \theta d\theta. \end{cases}$$

● 用途:

散射问题中一般波函数用球面波展开!

2.1 缔合Legendre多项式

性质6 递推关系

其中一个关系式 ($k \geq 1$):

$$(2k+1)xP_k^m(x) = (k+m)P_{k-1}^m(x) + (k-m+1)P_{k+1}^m(x).$$

2.1 缔合 $Legendre$ 多项式

性质6 递推关系

其中一个关系式 ($k \geq 1$):

$$(2k+1)xP_k^m(x) = (k+m)P_{k-1}^m(x) + (k-m+1)P_{k+1}^m(x).$$

● 证明：利用 $Legendre$ 多项式的递推公式，

$$(k+1)P_{k+1}(x) - (2k+1)xP_k(x) + kP_{k-1}(x) = 0, \quad ①$$

$$(2k+1)P_k(x) = P'_{k+1}(x) - P'_{k-1}(x), \quad ②$$

2.1 缔合Legendre多项式

- 对①求 m 次导数, 对②求 $m-1$ 次导数, 得:

$$(k+1)P_{k+1}^{[m]}(x) - (2k+1)xP_k^{[m]}(x) - m(2k+1)P_k^{[m-1]}(x) + kP_{k-1}^{[m]}(x) = 0, \quad \textcircled{3}$$

$$(2k+1)P_k^{[m-1]}(x) = P_{k+1}^{[m]}(x) - P_{k-1}^{[m]}(x). \quad \textcircled{4}$$

2.1 缔合Legendre多项式

- 从③、④联立, 消去 $P_k^{[m-1]}(x)$, 再两端同乘因子 $(1-x^2)^{m/2}$, 得

$$(2k+1)xP_k^m(x) = (k+m)P_{k-1}^m(x) + (k-m+1)P_{k+1}^m(x),$$

其中 $k \geq 1$.

2.2 一般球函数

2.2.1 表达式

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = P_l^m(\cos \theta) \left\{ \begin{array}{l} \sin m\varphi \\ \cos m\varphi \end{array} \right\},$$

其中 $m = 0, 1, 2, \dots, l$; $l = 0, 1, 2, \dots$. 这就是 l 阶球函数, 花括号表示任取其一.

2.2 一般球函数

- l 阶球函数 $Y_l^m(\theta, \varphi)$ 的个数: $2l + 1$, 其分别为:

$$\begin{cases} P_l(\cos \theta), & m = 0, \\ P_l^m \sin m\varphi, & m = 1, 2, \dots, l, \\ P_l^m \cos m\varphi, & m = 1, 2, \dots, l. \end{cases}$$

2.2 一般球函数

● 复数形式的球函数:⁷⁰

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = P_l^{|m|}(\cos \theta)e^{im\varphi},$$

其中 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$; $l = 0, 1, 2, \dots$.

⁷⁰独立的仍是 $2l + 1$ 个.

2.2 一般球函数

2.2.2 正交关系(复数形式)

两个不同阶球函数在球面上正交, 即

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi Y_l^m(\theta, \varphi) [Y_k^n(\theta, \varphi)]^* \sin \theta d\theta = 0,$$

其中 $m \neq n$ 或 $l \neq k$.

2.2 一般球函数

证明：以复数形式为例，

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi P_l^{|m|}(\cos \theta) P_k^{|n|}(\cos \theta) e^{im\varphi} (e^{in\varphi})^* \sin \theta d\theta \\ &= \int_{-1}^1 P_l^{|m|}(x) P_k^{|n|}(x) dx \cdot \int_0^{2\pi} e^{im\varphi} (e^{in\varphi})^* d\varphi \\ &= 0, \quad m \neq n \text{ 或 } l \neq k. \end{aligned}$$

2.2 一般球函数

2.2.3 模

$$\begin{aligned}(N_l^m)^2 &= \int \int Y_l^m(\theta, \varphi) [Y_l^m(\theta, \varphi)]^* \sin \theta d\theta d\varphi \\&= \int_0^\pi [P_l^{|m|}(\cos \theta)]^2 \sin \theta d\theta \cdot \int_0^{2\pi} e^{im\varphi} (e^{im\varphi})^* d\varphi \\&= \frac{2}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!} \cdot 2\pi.\end{aligned}$$

2.2 一般球函数

● 因此,

$$N_l^m = \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1} \frac{(l+|m|)!}{(l-|m|)!}}$$

2.2 一般球函数

2.2.4 广义Fourier展开

以球函数 $Y_l^m(\theta, \varphi)$ 作为基, 将 $f(\theta, \varphi)$ 展开,

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_l^m P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}.$$

2.2 一般球函数

- 利用 $Y_l^m(\theta, \varphi)$ 的正交性和模的关系式, 得到展开系数为,

$$C_l^m = \frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(\theta, \varphi) P_l^{|m|}(\cos \theta) \cdot [e^{im\varphi}]^* \sin \theta d\theta d\varphi.$$

2.2 一般球函数

2.2.5 正交归一化的球函数

$$\begin{aligned} Y_{lm}(\theta, \varphi) &= \frac{1}{N_l^m} Y_l^m(\theta, \varphi) \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi} \frac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}} P_l^{|m|}(\cos \theta) e^{im\varphi}, \end{aligned}$$

其中 $m = 0, \pm 1, \dots, \pm l$; $l = 0, 1, 2, \dots$.

2.2 一般球函数

- 正交归一性:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi Y_{lm}(\theta, \varphi) Y_{kn}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = \delta_{lk} \delta_{mn}.$$

2.2 一般球函数

- 用正交归一化的球函数作广义 $Fourier$ 展开:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

2.2 一般球函数

- 用正交归一化的球函数作广义 $Fourier$ 展开:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

- 其中

$$C_{lm} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

2.2 一般球函数

- 用正交归一化的球函数作广义 $Fourier$ 展开:

$$f(\theta, \varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l C_{lm} Y_{lm}(\theta, \varphi),$$

- 其中

$$C_{lm} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} f(\theta, \varphi) Y_{lm}^*(\theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi.$$

- 注：以上球函数性质均以复数形式表示，实数形式的性质参见教科书！

2.2 一般球函数

2.2.6 球函数应用举例

例1: 书 $p.241$, 6.

2.2 一般球函数

2.2.6 球函数应用举例

例1: 书p.241, 6.

- 第一步: 选坐标系, 使问题与 φ 无关, 即关于极轴对称.

2.2 一般球函数

2.2.6 球函数应用举例

例1: 书p.241, 6.

- 第一步: 选坐标系, 使问题与 φ 无关, 即关于极轴对称.
- 第二步: 将空间分成球内、球外两部分, 分别求解.

2.2 一般球函数

2.2.6 球函数应用举例

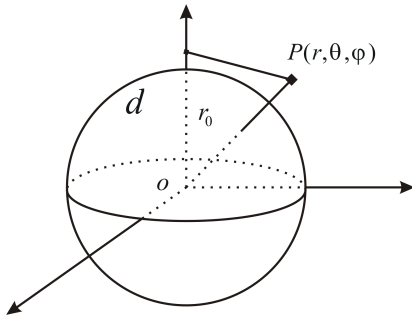
例1: 书p.241, 6.

- 第一步: 选坐标系, 使问题与 φ 无关, 即关于极轴对称.
- 第二步: 将空间分成球内、球外两部分, 分别求解.
- 第三步: 利用边界条件(含自然边界条件)和联结条件定解.

1. 轴对称球函数
2. 一般球函数

2.2 一般球函数

- 设球内外电势分别为 $U_i(r, \theta)$, $U_e(r, \theta)$.



2.2 一般球函数

- 显然, 球内无电荷, 电势满足:

$$\nabla^2 U_i = 0.$$

2.2 一般球函数

- 显然, 球内无电荷, 电势满足:

$$\nabla^2 U_i = 0.$$

- 轴对称问题的通解为:

$$U_i(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + \frac{B'_l}{r^{l+1}}) P_l(\cos \theta).$$

2.2 一般球函数

- 因为 $r \rightarrow 0$ 时, U_i 有限(自然边界条件), 因此

$$B_l' = 0,$$

2.2 一般球函数

- 因为 $r \rightarrow 0$ 时, U_i 有限(自然边界条件), 因此

$$B'_l = 0,$$

- 即

$$U_i(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos \theta).$$

2.2 一般球函数

- 球外区域： $U_e(r, \theta)$ 由两部分组成

2.2 一般球函数

- 球外区域： $U_e(r, \theta)$ 由两部分组成
 - 点电荷 $4\pi\epsilon_0 q$ 产生的电势；

2.2 一般球函数

- 球外区域： $U_e(r, \theta)$ 由两部分组成
 - 点电荷 $4\pi\epsilon_0 q$ 产生的电势；
 - 介质球上感应电荷产生的电势 $v(r, \theta)$.

2.2 一般球函数

- 球外区域： $U_e(r, \theta)$ 由两部分组成
 - 点电荷 $4\pi\epsilon_0 q$ 产生的电势；
 - 介质球上感应电荷产生的电势 $v(r, \theta)$.
- 即

$$U_e(r, \theta) = \frac{q}{R} + v(r, \theta).$$

其中感应电荷在球外区域产生的电势 $v(r, \theta)$ 满足方程,

$$\nabla^2 v(r, \theta) = 0.$$

2.2 一般球函数

- 它的轴对称解为,

$$v(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A'_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}) P_l(\cos \theta).$$

2.2 一般球函数

- 它的轴对称解为,

$$v(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A'_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}) P_l(\cos \theta).$$

- 因为 $r \rightarrow \infty$ 时, U_e 有限(通常选为电势零点)(自然边界条件), 所以 $A'_l = 0$.

2.2 一般球函数

- 它的轴对称解为,

$$v(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (A'_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}) P_l(\cos \theta).$$

- 因为 $r \rightarrow \infty$ 时, U_e 有限(通常选为电势零点)(自然边界条件), 所以 $A'_l = 0$.
- 即,

$$v(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta).$$

2.2 一般球函数

- 另外, 考虑到

$$R = \sqrt{d^2 - 2rd \cos \theta + r^2},$$

2.2 一般球函数

- 另外, 考虑到

$$R = \sqrt{d^2 - 2rd \cos \theta + r^2},$$

- 则

$$U_e(r, \theta) = \frac{q}{\sqrt{d^2 - 2dr \cos \theta + r^2}} + \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta).$$

2.2 一般球函数

● 考虑联结条件：

$$\begin{cases} U_i|_{r=r_0} = U_e|_{r=r_0} & (\text{电势连续}) \\ \varepsilon\varepsilon_0 \frac{\partial U_i}{\partial r}|_{r=r_0} = \varepsilon_0 \frac{\partial U_e}{\partial r}|_{r=r_0} & (\text{电位移矢量} \\ & \text{法向分量连续}) \end{cases}$$

2.2 一般球函数

- 考虑联结条件：

$$\begin{cases} U_i|_{r=r_0} = U_e|_{r=r_0} & (\text{电势连续}) \\ \varepsilon \varepsilon_0 \frac{\partial U_i}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = \varepsilon_0 \frac{\partial U_e}{\partial r} \Big|_{r=r_0} & (\text{电位移矢量} \\ & \text{法向分量连续}) \end{cases}$$

- 定出系数 A_l, B_l !

2.2 一般球函数

为了利用联结条件, 将 $U_e(r, \theta)$ 中点电荷的势化成 $P_l(\cos \theta)$ 的叠加.

当 r 在 r_0 附近时, $r < d$, 因此,

$$\begin{aligned} \frac{q}{\sqrt{d^2 - 2dr \cos \theta + r^2}} &= \frac{q}{d} \frac{1}{\sqrt{1 - 2(\frac{r}{d}) \cos \theta + (\frac{r}{d})^2}} \\ &= \frac{q}{d} \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{d}\right)^l P_l(\cos \theta) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{d^{l+1}} r^l P_l(\cos \theta). \end{aligned}$$

2.2 一般球函数

● 所以, $U_i|_{r=r_0} = U_e|_{r=r_0}$ 给出,

$$\begin{aligned} \sum_{l=0}^{\infty} A_l r_0^l P_l(\cos \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q}{d^{l+1}} r_0^l P_l(\cos \theta) \\ &+ \sum_{l=0}^{\infty} \frac{B_l}{r_0^{l+1}} P_l(\cos \theta), \end{aligned}$$

2.2 一般球函数

● 另一个条件 $\varepsilon \varepsilon_0 \left. \frac{\partial U_i}{\partial r} \right|_{r=r_0} = \varepsilon_0 \left. \frac{\partial U_e}{\partial r} \right|_{r=r_0}$ 给出,

$$\varepsilon \sum_{l=0}^{\infty} l A_l r_0^{l-1} P_l(\cos \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{q l r_0^{l-1}}{d^{l+1}} P_l(\cos \theta) - \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+1) B_l}{r_0^{l+2}} P_l(\cos \theta).$$

2.2 一般球函数

- 比较上述两式中同阶 $P_l(\cos \theta)$ 的系数, 得:

$$\begin{aligned} A_l r_0^l &= \frac{q r_0^l}{d^{l+1}} + \frac{B_l}{r_0^{l+1}}, \\ \varepsilon l r_0^{l-1} A_l &= \frac{q l r_0^{l-1}}{d^{l+1}} - (l+1) \frac{B_l}{r_0^{l+2}}. \end{aligned}$$

2.2 一般球函数

- 联立求解上式得,

$$A_l = \frac{q(2l+1)}{[(\varepsilon+1)l+1]d^{l+1}},$$
$$B_l = -q(\varepsilon-1)\frac{lr_0^{2l+1}}{[(\varepsilon+1)l+1]d^{l+1}}.$$

2.2 一般球函数

所以, 球内外电势分布为:

$$U_i(r, \theta) = q \sum_{l=0}^{\infty} \frac{2l+1}{[(\varepsilon+1)l+1]d^{l+1}} r^l P_l(\cos \theta),$$
$$U_e(r, \theta) = \frac{q}{\sqrt{d^2 - 2dr \cos \theta + r^2}} - q(\varepsilon-1) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{l r_0^{2l+1}}{[(\varepsilon+1)l+1]d^{l+1}} \frac{1}{r^{l+1}} P_l(\cos \theta).$$

2.2 一般球函数

2.2.6 球函数应用举例

例2: 书 $p.255$ 例5. 非轴对称球函数的应用.

定解问题:

$$\begin{cases} \nabla^2 U = 0 & (r > r_0) \\ \frac{\partial U}{\partial r} \Big|_{r=r_0} = U_0(\sin^2 \theta \sin^2 \varphi - \frac{1}{3}) \\ U|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0. \end{cases}$$

2.2 一般球函数

● 求解：

2.2 一般球函数

- 求解：
- 第一步，写出 *Laplace* 方程在球坐标系中分离变量形式，

$$\begin{cases} R(r) : r^l, r^{-(l+1)} \\ \Phi(\varphi) : \sin m\varphi, \cos m\varphi, \quad m = 0, 1, 2, \dots; m \leq l \\ \Theta(\theta) : P_l^m(\cos \theta) \end{cases}$$

2.2 一般球函数

- 第二步, 由 $U(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ 构造出最一般形式的解(通解),

$$\begin{aligned} & U(r, \theta, \varphi) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} r^l [A_l^m \cos m\varphi + B_l^m \sin m\varphi] P_l^m(\cos \theta) \\ &+ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} [C_l^m \cos m\varphi + D_l^m \sin m\varphi] P_l^m(\cos \theta). \end{aligned}$$

含四组待定系数 $\{A_l^m\}, \{B_l^m\}, \{C_l^m\}, \{D_l^m\}$.

2.2 一般球函数

- 第三步, 由边界条件确定待定系数.
(1) 自然边界条件

$$U|_{r \rightarrow \infty} \rightarrow 0 \Rightarrow A_l^m = 0, B_l^m = 0.$$

因此,

$$U(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \frac{1}{r^{l+1}} \left[C_l^m \cos m\varphi + D_l^m \sin m\varphi \right] P_l^m(\cos \theta).$$

2.2 一般球函数

(2) 由 $r = r_0$ 处的边界条件得:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} -\frac{l+1}{r_0^{l+2}} \left[C_l^m \cos m\varphi + D_l^m \sin m\varphi \right] P_l^m(\cos \theta) \\ = U_0 \left(\sin^2 \theta \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right).$$

2.2 一般球函数

- 为了比较两端关于 $P_l^m(\cos \theta)$ 的系数, 将右端按球函数展开:

$$\begin{aligned} & U_0 \left(\sin^2 \theta \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{U_0}{3} \left[-P_2(\cos \theta) - \frac{1}{2} P_2^2(\cos \theta) \cos 2\varphi \right]. \end{aligned}$$

2.2 一般球函数

- 为了比较两端关于 $P_l^m(\cos \theta)$ 的系数, 将右端按球函数展开:

$$\begin{aligned} & U_0 \left(\sin^2 \theta \sin^2 \varphi - \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{U_0}{3} \left[-P_2(\cos \theta) - \frac{1}{2} P_2^2(\cos \theta) \cos 2\varphi \right]. \end{aligned}$$

- 所以, 有 C_2^0, C_2^2 不为零, 其余 $C_l^m = 0$,
且所有 $D_l^m = 0$.

2.2 一般球函数

● 即

$$-\frac{3}{r_0^4}C_2^0 = -\frac{U_0}{3}, \quad -\frac{3}{r_0^4}C_2^2 = -\frac{U_0}{6}.$$

2.2 一般球函数

● 即

$$-\frac{3}{r_0^4}C_2^0 = -\frac{U_0}{3}, \quad -\frac{3}{r_0^4}C_2^2 = -\frac{U_0}{6}.$$

● 由此得到:

$$C_2^0 = \frac{1}{9}U_0r_0^4,$$
$$C_2^2 = \frac{1}{18}U_0r_0^4.$$

2.2 一般球函数

● 所以,

$$\begin{aligned} U(r, \theta, \varphi) = & \frac{1}{9} U_0 r_0^4 \cdot \frac{1}{r^3} P_2(\cos \theta) \\ & + \frac{1}{18} U_0 r_0^4 \cdot \frac{1}{r^3} P_2^2(\cos \theta) \cos 2\varphi. \end{aligned}$$

九、方程和定解条件的导出
十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式
十一、直角坐标系中方程的分离变量法
十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法
十三、球函数
第十四章、柱函数

1. 柱函数的来源和分类
2. 柱函数的性质
3. 球 *Bessel* 函数及其性质
4. 柱函数应用举例

柱函数

第十四章、柱函数

1.1 *Laplace*方程在柱坐标系中分离变量

*Laplace*方程在柱坐标中分离变量

$$\begin{aligned}\nabla^2 u &= 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= 0, \\ u(\rho, \varphi, z) &= R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z).\end{aligned}$$

1.1 *Laplace*方程在柱坐标中分离变量

● 由

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = m^2, m = 0, 1, 2, \dots \\ \Phi(\varphi) : \sin m\varphi, \cos m\varphi. \end{cases}$$

1.1 Laplace 方程在柱坐标中分离变量

● 由

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = m^2, m = 0, 1, 2, \dots \\ \Phi(\varphi) : \sin m\varphi, \cos m\varphi. \end{cases}$$

● 而

$$\begin{aligned} \frac{d^2 Z}{dz^2} - \mu Z &= 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dR}{d\rho} \right) + \left(\mu - \frac{m^2}{\rho^2} \right) R &= 0. \end{aligned}$$

1.1 *Laplace*方程在柱坐标中分离变量

- 1. 若圆柱侧面为齐次边界条件, 则 $\mu \geq 0$,⁷¹

$$Z(z) : e^{\sqrt{\mu}z}, e^{-\sqrt{\mu}z}.$$

⁷¹等号仅对第二类齐次边界条件成立, 且 $Z(z) : 1, z, z^2, \dots$

1.1 Laplace 方程在柱坐标中分离变量

- 1. 若圆柱侧面为齐次边界条件, 则 $\mu \geq 0$,⁷¹

$$Z(z) : e^{\sqrt{\mu}z}, e^{-\sqrt{\mu}z}.$$

- 令 $x = \sqrt{\mu}\rho$, 则 R 满足 m 阶 Bessel 方程,

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) R = 0.$$

⁷¹等号仅对第二类齐次边界条件成立, 且 $Z(z) : 1, z$.

1.1 Laplace 方程在柱坐标中分离变量

- 2. 若圆柱上下底面为齐次边界条件, 则 $\mu \leq 0$,⁷²

$$Z(z) : \cos \sqrt{-\mu}z, \sin \sqrt{-\mu}z.$$

⁷²等号仅对第二类齐次边界条件成立, 且 $Z(z) : 1, z, z^2, \dots$

1.1 *Laplace*方程在柱坐标中分离变量

- 令 $x = \sqrt{-\mu\rho}$, 则 R 满足虚宗量 *Bessel* 方程,

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} - \left(1 + \frac{m^2}{x^2}\right) R = 0.$$

1.1 Laplace 方程在柱坐标中分离变量

- 令 $x = \sqrt{-\mu\rho}$, 则 R 满足虚宗量 Bessel 方程,

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} - \left(1 + \frac{m^2}{x^2}\right) R = 0.$$

- 若令 $t = ix$, 则 $R(t)$ 满足 Bessel 方程,

$$\frac{d^2 R}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dR}{dt} + \left(1 - \frac{m^2}{t^2}\right) R = 0.$$

1.2 *Helmholtz*方程在柱坐标中分离变量

*Helmholtz*方程在柱坐标中分离变量

$$\nabla^2 v + k^2 v = 0,$$

$$v(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

1.2 *Helmholtz*方程在柱坐标中分离变量

● 角度部分,

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = m^2, m = 0, 1, 2, \dots \\ \Phi(\varphi) : \sin m\varphi, \cos m\varphi. \end{cases}$$

1.2 Helmholtz方程在柱坐标中分离变量

● 角度部分,

$$\begin{cases} \Phi'' + \lambda\Phi = 0 \\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda = m^2, m = 0, 1, 2, \dots \\ \Phi(\varphi) : \sin m\varphi, \cos m\varphi. \end{cases}$$

● z 轴部分,

$$\begin{cases} Z'' - \mu Z = 0 \\ \text{上下底齐次边界条件} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} Z(z) : \cos \sqrt{-\mu}z, \\ \sin \sqrt{-\mu}z, \\ \text{确定}\mu\text{的取值.} \end{cases}$$

1.2 Helmholtz方程在柱坐标中分离变量

- 还剩下 $R(x)$ 部分,

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) R = 0,$$

其中,

$$x \equiv \sqrt{k^2 + \mu\rho}.$$

1.2 *Helmholtz*方程在柱坐标中分离变量

- 还剩下 $R(x)$ 部分,

$$\frac{d^2 R}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dR}{dx} + \left(1 - \frac{m^2}{x^2}\right) R = 0,$$

其中,

$$x \equiv \sqrt{k^2 + \mu\rho}.$$

- 侧面齐次边界条件确定 k 的取值.

1.3 *Helmholtz*方程在球坐标中分离变量

*Helmholtz*方程在球坐标中分离变量

$$\nabla^2 v + k^2 v = 0$$

$$v(r, \theta, \varphi) = R(r)Y(\theta, \varphi)$$

1.3 Helmholtz方程在球坐标中分离变量

● $R(r)$ 满足球 Bessel 方程,

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [k^2 r^2 - l(l+1)] R = 0,$$

1.3 Helmholtz方程在球坐标中分离变量

- $R(r)$ 满足球 Bessel 方程,

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [k^2 r^2 - l(l+1)] R = 0,$$

- 令 $x = kr$, $R(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} y(x)$, 则 $y(x)$ 满足半整数阶 Bessel 方程,

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left[1 - \frac{\left(l + \frac{1}{2}\right)^2}{x^2} \right] y = 0.$$

1.4 Bessel 方程的解

- 1. 若 ν 为非整数, 则解为,

$$J_\nu(x), J_{-\nu}(x);$$

或

$$J_\nu(x), N_\nu(x);$$

其中 Neumann 函数的定义是,

$$N_\nu = \frac{J_\nu(x) \cos \nu\pi - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi}.$$

1.4 *Bessel*方程的解

- 2. 若 m 为整数, 则解为,

$$J_m(x), N_m(x).$$

1.4 Bessel方程的解

- 3. ν 是整数或非整数
引入第一类和第二类 *Hankel* 函数:

$$H_{\nu}^{(1)}(x) = J_{\nu}(x) + iN_{\nu}(x),$$

$$H_{\nu}^{(2)}(x) = J_{\nu}(x) - iN_{\nu}(x).$$

1.4 *Bessel*方程的解

- 3. ν 是整数或非整数
引入第一类和第二类 *Hankel* 函数:

$$H_{\nu}^{(1)}(x) = J_{\nu}(x) + iN_{\nu}(x),$$

$$H_{\nu}^{(2)}(x) = J_{\nu}(x) - iN_{\nu}(x).$$

- Bessel*方程的解总是可以表示成:

$$H_{\nu}^{(1)}(x), \quad H_{\nu}^{(2)}(x).$$

1.4 *Bessel*方程的解

- 将 $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$, $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$ 统称为柱函数, 且作如下(人为)的分类:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{第一类柱函数:} & J_\nu(x), \\ \text{第二类柱函数:} & N_\nu(x), \\ \text{第三类柱函数:} & H_\nu^{(1)}(x), H_\nu^{(2)}(x). \end{array} \right.$$

2.1 $x \rightarrow 0$ 和 $x \rightarrow \infty$ 时的行为

当 $x \rightarrow 0$ 时:

$$J_0(x) \rightarrow 1, J_\nu(x) \rightarrow 0, J_{-\nu}(x) \rightarrow \infty, \\ N_0(x) \rightarrow -\infty, N_\nu(x) \rightarrow \pm\infty.$$

2.1 $x \rightarrow 0$ 和 $x \rightarrow \infty$ 时的行为

当 $x \rightarrow 0$ 时:

$$J_0(x) \rightarrow 1, J_\nu(x) \rightarrow 0, J_{-\nu}(x) \rightarrow \infty, \\ N_0(x) \rightarrow -\infty, N_\nu(x) \rightarrow \pm\infty.$$

- 因此, 柱内解中应消去 $J_{-\nu}(x)$ 和 $N_\nu(x)$, 只保留 $J_\nu(x)$.

2.1 $x \rightarrow 0$ 和 $x \rightarrow \infty$ 时的行为

当 $x \rightarrow \infty$ 时, 柱函数的渐近行为如下:

$$J_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

$$N_\nu(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin\left(x - \nu\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right),$$

2.1 $x \rightarrow 0$ 和 $x \rightarrow \infty$ 时的行为

当 $x \rightarrow \infty$ 时, 柱函数的渐近行为如下:

$$H_\nu^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left[i \left(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right],$$
$$H_\nu^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \exp \left[-i \left(x - \nu \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} \right) \right].$$

● 显然, 它们全都趋于零.

因此, 柱外解应包含两个线性无关的特解,
 $J_\nu(x)$, $N_\nu(x)$ 或 $H_\nu^{(1)}(x)$, $H_\nu^{(2)}(x)$.

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 柱函数的来源和分类

2. 柱函数的性质

3. 球 *Bessel* 函数及其性质

4. 柱函数应用举例

2.2 递推关系

- (1) $J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \nu J_\nu(x)/x.$

2.2 递推关系

- (1) $J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \nu J_\nu(x)/x$.
- 证明:

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k},$$

$$\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+2k} x^{2k},$$

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu+2k} x^{2k-1}.$$

2.2 递推关系

令 $k = l + 1$, 则

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu} \right] &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^{l+1} 2(l+1)}{(l+1)! \Gamma(\nu + l + 1 + 1)} \left(\frac{1}{2} \right)^{\nu+2l+2} x^{2l+1} \\ &= -\frac{1}{x^\nu} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l! \Gamma(\nu + 1 + l + 1)} \left(\frac{x}{2} \right)^{\nu+1+2l} \\ &= -\frac{J_{\nu+1}(x)}{x^\nu}, \end{aligned}$$

$$\text{即, } J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \nu J_\nu(x)/x.$$

2.2 递推关系

- (2) $J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \nu J_\nu(x)/x$. (证明方法同上.)

2.2 递推关系

- (2) $J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \nu J_\nu(x)/x$. (证明方法同上.)
- (3) 由(1)和(2), 消去 $J'_\nu(x)$ 得:

$$J_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu J_\nu(x)}{x} + J_{\nu-1}(x) = 0.$$

2.2 递推关系

- (2) $J'_\nu(x) = J_{\nu-1}(x) - \nu J_\nu(x)/x$. (证明方法同上.)
- (3) 由(1)和(2), 消去 $J'_\nu(x)$ 得:

$$J_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu J_\nu(x)}{x} + J_{\nu-1}(x) = 0.$$

- (4) 由(1)和(2), 消去 $J_\nu(x)$ 得:

$$J'_\nu(x) = \frac{1}{2} [J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)].$$

2.3 本征值和零点问题

本征值和零点问题

若圆柱侧面有齐次边界条件： $\mu \geq 0$.

对 $\mu > 0$, $R(\rho)$ 是 m 阶 *Bessel* 函数 $J_m(\sqrt{\mu}\rho)$.

对柱内解, 取 $m \geq 0$.

2.3 本征值和零点问题

- (1) 对第一类齐次边界条件 $R(\rho_0) = 0$, (ρ_0 为柱的半径), 则 $J_m(\sqrt{\mu}\rho_0) = 0$, 即

$$\mu_n^{(m)} = \left(\frac{x_n^{(m)}}{\rho_0} \right)^2,$$

其中 $x_n^{(m)}$ 是 $J_m(x)$ 的第 n 个零点.

2.3 本征值和零点问题

- (2) 对第二类齐次边界条件, $R'(\rho_0) = 0$, 即

$$\left. \frac{d}{d\rho} J_m(\sqrt{\mu}\rho) \right|_{\rho=\rho_0} = \sqrt{\mu} J'_m(\sqrt{\mu}\rho_0) = 0.$$

2.3 本征值和零点问题

- (2) 对第二类齐次边界条件, $R'(\rho_0) = 0$, 即

$$\left. \frac{d}{d\rho} J_m(\sqrt{\mu}\rho) \right|_{\rho=\rho_0} = \sqrt{\mu} J'_m(\sqrt{\mu}\rho_0) = 0.$$

- 若 $\mu \neq 0$, 则上述等价于

$$J'_m(\sqrt{\mu}\rho_0) = 0.$$

2.3 本征值和零点问题

- 所以, 本征值为

$$\mu_n^{(m)} = \left(\frac{x_n^{(m)}}{\rho_0} \right)^2,$$

其中 $x_n^{(m)}$ 是 $J'_m(x)$ 的第 n 个零点.

2.3 本征值和零点问题

- 由递推公式, $J'_m(x)$ 的零点通常用 $J_{m-1}(x)$ 和 $J_{m+1}(x)$ 的交点来表示,

$$J'_m(x) = \frac{1}{2} [J_{m-1}(x) - J_{m+1}(x)].$$

对 $m = 0$ 的情形:

$$J'_0(x) = -J_1(x).$$

2.3 本征值和零点问题

- (3) 对第三类齐次边界条件,

$$R(\rho_0) + HR'(\rho_0) = 0,$$

即

$$J_m(\sqrt{\mu}\rho_0) + H\sqrt{\mu}J'_m(\sqrt{\mu}\rho_0) = 0.$$

2.3 本征值和零点问题

- 利用 $x_0 = \sqrt{\mu}\rho_0$, $h = \rho_0/H$, 则上式可化简为
(利用 $J'_\nu(x) = -J_{\nu+1}(x) + \nu J_\nu(x)/x$),

$$J_m(x_0) = \frac{x_0}{h + m} J_{m+1}(x_0),$$

其中本征值 $\mu_n^{(m)} = \left(\frac{x_n^{(m)}}{\rho_0}\right)^2$, $x_n^{(m)}$ 是上式的第 n 个零点.

2.3 本征值和零点问题

● $J_m(x)$ 零点的性质:

(i) 零点正负成对, 且均为实数.⁷³

(ii) 零点的个数无穷多. 从渐近形式可看出,

$$J_m(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \cos(x - m\pi/2 - \pi/4).$$

(iii) $J_m(x)$ 和 $J_{m+1}(x)$ 的零点是两两相间, 且 $J_m(x)$ 的最小零点比 $J_{m+1}(x)$ 的最小零点更靠近原点.

⁷³ 因为 $J_m(-x) \propto J_m(x)$

2.3 本征值和零点问题

证明: (iii)

$J_m(x)$ 和 $J_{m+1}(x)$ 的零点是两两相间, 且 $J_m(x)$ 的最小零点比 $J_{m+1}(x)$ 的最小零点更靠近原点.

2.3 本征值和零点问题

证明: (iii)

$J_m(x)$ 和 $J_{m+1}(x)$ 的零点是两两相间, 且 $J_m(x)$ 的最小零点比 $J_{m+1}(x)$ 的最小零点更靠近原点.

- 中值定理: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且 $f(a) = f(b)$, 则必有 $f'(\xi) = 0$, 且 $a < \xi < b$.

2.3 本征值和零点问题

证明: (iii)

$J_m(x)$ 和 $J_{m+1}(x)$ 的零点是两两相间, 且 $J_m(x)$ 的最小零点比 $J_{m+1}(x)$ 的最小零点更靠近原点.

- 中值定理: 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 连续, 且 $f(a) = f(b)$, 则必有 $f'(\xi) = 0$, 且 $a < \xi < b$.
- 由中值定理知, $J_m(x)$ 两个零点之间, 必有 $J'_m(x)$ 的零点.

2.3 本征值和零点问题

- 再由递推关系:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{J_m}{x^m} \right) = -\frac{J_{m+1}}{x^m},$$

2.3 本征值和零点问题

- 再由递推关系:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{J_m}{x^m} \right) = -\frac{J_{m+1}}{x^m},$$

- 即 $J'_m(x)$ 的零点对应于 $J_{m+1}(x)$ 的零点.

2.3 本征值和零点问题

- 再由递推关系:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{J_m}{x^m} \right) = -\frac{J_{m+1}}{x^m},$$

- 即 $J'_m(x)$ 的零点对应于 $J_{m+1}(x)$ 的零点.
- 所以, 在 $J_m(x)$ 两个零点之间必有 $J_{m+1}(x)$ 的零点.

2.3 本征值和零点问题

- 同理, 由另一个递推关系:

$$\frac{d}{dx} \left[x^{m+1} J_{m+1}(x) \right] = x^{m+1} J_m(x).$$

2.3 本征值和零点问题

- 同理, 由另一个递推关系:

$$\frac{d}{dx} \left[x^{m+1} J_{m+1}(x) \right] = x^{m+1} J_m(x).$$

- 可推断出在 $J_{m+1}(x)$ 的两个零点之间必有 $J_m(x)$ 的零点.

2.3 本征值和零点问题

下面讨论 $J_m(x)$ 的最小零点与 $J_{m+1}(x)$ 的最小零点.

2.3 本征值和零点问题

下面讨论 $J_m(x)$ 的最小零点与 $J_{m+1}(x)$ 的最小零点.

- 设 a 为 $J_m(x)$ 的最小零点, b 为 $J_{m+1}(x)$ 的最小零点.

2.3 本征值和零点问题

下面讨论 $J_m(x)$ 的最小零点与 $J_{m+1}(x)$ 的最小零点.

- 设 a 为 $J_m(x)$ 的最小零点, b 为 $J_{m+1}(x)$ 的最小零点.

2.3 本征值和零点问题

下面讨论 $J_m(x)$ 的最小零点与 $J_{m+1}(x)$ 的最小零点.

- 设 a 为 $J_m(x)$ 的最小零点, b 为 $J_{m+1}(x)$ 的最小零点.
- 取 $F(x) = x^{m+1}J_{m+1}(x)$, 显然有:

$$F(0) = 0, F(b) = 0.$$

2.3 本征值和零点问题

- 由中值定理知,

$$\left. \frac{d}{dx} \left[x^{m+1} J_{m+1}(x) \right] \right|_{x=\xi} = 0.$$

2.3 本征值和零点问题

- 由中值定理知,

$$\frac{d}{dx} [x^{m+1} J_{m+1}(x)] \Big|_{x=\xi} = 0.$$

- 由递推关系知, 此中值定理即给出:

$$[x^{m+1} J_m(x)] \Big|_{x=\xi} = 0.$$

2.3 本征值和零点问题

- 由中值定理知,

$$\frac{d}{dx} [x^{m+1} J_{m+1}(x)] \Big|_{x=\xi} = 0.$$

- 由递推关系知, 此中值定理即给出:

$$[x^{m+1} J_m(x)] \Big|_{x=\xi} = 0.$$

- 所以, $\xi = a$ 是 $J_m(x)$ 的最小零点, 且满足

$$0 < \xi = a < b$$

即 a 比 b 更靠近原点.

2.4 正交性、模、广义 *Fourier* 展开

不同本征值 (μ_n, μ_l) 的同阶 *Bessel* 函数正交

$$\int_0^{\rho_0} J_m(\sqrt{\mu_n}\rho) J_m(\sqrt{\mu_l}\rho) \rho d\rho = 0, \quad n \neq l.$$

证明参见书 *p.*215 – 217.

2.4 正交性、模、广义 Fourier 展开

● 模 (推导见书 p.268)

$$\begin{aligned}[N_n^{(m)}]^2 &= \int_0^{\rho_0} \left[J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}} \rho) \right]^2 \rho d\rho \\ &= \frac{1}{2} \left[\rho_0^2 - \frac{m^2}{\mu_n^{(m)}} \right] \left[J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}} \rho_0) \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho_0^2 \left[J'_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}} \rho_0) \right]^2.\end{aligned}$$

2.4 正交性、模、广义 Fourier 展开

● 模 (推导见书 p.268)

$$\begin{aligned} [N_n^{(m)}]^2 &= \int_0^{\rho_0} \left[J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}} \rho) \right]^2 \rho d\rho \\ &= \frac{1}{2} \left[\rho_0^2 - \frac{m^2}{\mu_n^{(m)}} \right] \left[J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}} \rho_0) \right]^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \rho_0^2 \left[J'_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}} \rho_0) \right]^2. \end{aligned}$$

● 注：模与齐次边界条件的类型有关.

2.4 正交性、模、广义 Fourier 展开

- 对第一类齐次边界条件 $J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0) = 0$, 有

$$\begin{aligned}[N_n^{(m)}]^2 &= \frac{1}{2}\rho_0^2 \left[J'_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0) \right]^2 \\ &= \frac{1}{2}\rho_0^2 \left[J_{m+1}(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0) \right]^2,\end{aligned}$$

其中第二式利用了递推关系.

2.4 正交性、模、广义 Fourier 展开

- 对第二类齐次边界条件 $J'_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0) = 0$, 有

$$[N_n^{(m)}]^2 = \frac{1}{2} \left[\rho_0^2 - \frac{m^2}{\mu_n^{(m)}} \right] \left[J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho_0) \right]^2.$$

2.4 正交性、模、广义 Fourier 展开

● 对第三类齐次边界条件

$$J'_m = -\frac{J_m}{\sqrt{\mu_n^{(m)}} H},$$

给出模的形式为,

$$[N_n^{(m)}]^2 = \frac{1}{2} \left[\rho_0^2 - \frac{m^2}{\mu_n^{(m)}} + \frac{\rho_0^2}{\mu_n^{(m)} H} \right] \left[J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}} \rho_0) \right]^2.$$

2.4 正交性、模、广义 *Fourier* 展开

- 可以证明, 本征函数族 $J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)$ 是完备的, 因此, 可以作为广义 *Fourier* 展开的基底.

2.4 正交性、模、广义 Fourier 展开

- 可以证明, 本征函数族 $J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho)$ 是完备的, 因此, 可以作为广义 Fourier 展开的基底.
- 若 $f(\rho)$ 在 $[0, \rho_0]$ 上连续, 则

$$f(\rho) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho),$$

$$f_n = \frac{1}{[N_n^{(m)}]^2} \int_0^{\rho_0} f(\rho) J_m(\sqrt{\mu_n^{(m)}}\rho) \rho d\rho.$$

2.4 正交性、模、广义 *Fourier* 展开

- 若 $f(\rho)$ 定义在 $[0, +\infty)$ 上, 则

$$f(\rho) = \int_0^{+\infty} \bar{f}(\omega) J_m(\omega\rho) \omega d\omega,$$
$$\bar{f}(\omega) = \int_0^{+\infty} f(\rho) J_m(\omega\rho) \rho d\rho.$$

2.5 母函数和积分表达式

将 $e^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})}$ 展开成 z 的幂级数形式:

$$e^{\frac{1}{2}xz} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{x}{z}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!} \left(\frac{1}{2}xz\right)^l \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{1}{2}\frac{x}{z}\right)^n.$$

2.5 母函数和积分表达式

● 令 $m = l - n$, 则 $m \in (-\infty, +\infty)$, 因此,

$$\begin{aligned} e^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})} &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} z^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{x}{2}\right)^n \frac{1}{(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} z^m \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{m+2n} \\ &= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) z^m, \quad 0 < |z| < +\infty. \end{aligned}$$

2.5 母函数和积分表达式

- *Bessel* 函数的母函数: $e^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})}$.

2.5 母函数和积分表达式

- Bessel 函数的母函数: $e^{\frac{1}{2}x(z-\frac{1}{z})}$.
- 令 $z = e^{i\psi}$, 则 $z - \frac{1}{z} = e^{i\psi} - e^{-i\psi} = 2i \sin \psi$,
代入母函数,

$$e^{ix \sin \psi} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} J_m(x) e^{im\psi}.$$

2.5 母函数和积分表达式

● 所以,

$$\begin{aligned} J_m(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{ix \sin \psi} e^{-im\psi} d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} e^{i(x \sin \psi - m\psi)} d\psi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos(x \sin \psi - m\psi) d\psi. \end{aligned}$$

3.1 线性独立解

球 *Bessel* 方程

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [k^2 r^2 - l(l+1)] R = 0.$$

3.1 线性独立解

球 Bessel 方程

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} + [k^2 r^2 - l(l+1)] R = 0.$$

- 作变换 $x = kr$, $R(r) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} y(x)$, 球 Bessel 方程化为 $l + \frac{1}{2}$ 阶 Bessel 方程,

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + \left[x^2 - \left(l + \frac{1}{2} \right)^2 \right] y = 0.$$

3.1 线性独立解

- 此方程的线性独立解通常取为下列形式之一：

$$\begin{cases} J_{l+1/2}(x), & J_{-(l+1/2)}(x), \\ J_{l+1/2}(x), & N_{l+1/2}(x), \\ H_{l+1/2}^{(1)}(x), & H_{l+1/2}^{(2)}(x). \end{cases}$$

3.1 线性独立解

- 定义球 *Bessel* 函数:

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x), \quad j_{-l}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-(l+1/2)}(x);$$

3.1 线性独立解

- 定义球 Bessel 函数:

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{l+1/2}(x), \quad j_{-l}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{-(l+1/2)}(x);$$

- 球 Neumann 函数:

$$n_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} N_{l+1/2}(x);$$

3.1 线性独立解

● 球 *Hankel* 函数:

$$h_l^{(1)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{l+1/2}^{(1)}(x);$$

$$h_l^{(2)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{l+1/2}^{(2)}(x).$$

3.2 递推关系

- 用 $z_l(x)$ 代表 $j_l(x)$, $j_{-l}(x)$, $n_l(x)$, $h_l^{(1)}(x)$, $h_l^{(2)}(x)$ 中任何一类, 即

$$z_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Z_{l+1/2}(x),$$

其中 $Z_{l+1/2}(x)$ 表示 $J_{l+1/2}$, $J_{-(l+1/2)}$, $N_{l+1/2}$, $H_{l+1/2}^{(1)}$ 或 $H_{l+1/2}^{(2)}$.

3.2 递推关系

- 利用以前关于 $Z_{l+1/2}(x)$ 的递推关系可得:

$$Z_{l+3/2}(x) - (2l+1)Z_{l+1/2}(x)/x + Z_{l-1/2}(x) = 0.$$

3.2 递推关系

- 利用以前关于 $Z_{l+1/2}(x)$ 的递推关系可得:

$$Z_{l+3/2}(x) - (2l+1)Z_{l+1/2}(x)/x + Z_{l-1/2}(x) = 0.$$

- 或者用 $z_l(x)$ 表示成:

$$z_{l+1}(x) = \frac{2l+1}{x} z_l - z_{l-1}.$$

3.3 初等函数表示式

● 利用

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \\ J_{-1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \end{aligned}$$

3.3 初等函数表示式

● 利用

$$\begin{aligned} J_{1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \\ J_{-1/2}(x) &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x, \end{aligned}$$

● 得到

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}, \quad j_{-1}(x) = \frac{\cos x}{x}.$$

3.3 初等函数表示式

- 另外, 考虑到

$$n_l(x) = (-1)^{l+1} j_{-(l+1)}(x),$$

3.3 初等函数表示式

- 另外, 考虑到

$$n_l(x) = (-1)^{l+1} j_{-(l+1)}(x),$$

- 得到

$$n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}, \quad n_{-1}(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

3.3 初等函数表示式

- 另外, 考虑到

$$n_l(x) = (-1)^{l+1} j_{-(l+1)}(x),$$

- 得到

$$n_0(x) = -\frac{\cos x}{x}, \quad n_{-1}(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

- 对球 *Hankel* 函数, 有

$$h_l^{(1)}(x) = j_l(x) + in_l(x), \quad h_l^{(2)}(x) = j_l(x) - in_l(x).$$

3.4 $x \rightarrow 0$ 和 $x \rightarrow \infty$ 时的行为

- 由 $j_l(x)$, $n_l(x)$ 的级数表达式,

$$j_l(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(l + k + \frac{3}{2})} \left(\frac{1}{2}\right)^{l+\frac{1}{2}+2k} x^{l+2k},$$
$$n_l(x) = (-1)^{l+1} \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k! \Gamma(-l + k + \frac{1}{2})} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-l-\frac{1}{2}+2k} x^{-l+2k-1},$$

3.4 $x \rightarrow 0$ 和 $x \rightarrow \infty$ 时的行为

- 得到: 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$j_0(x) \rightarrow 1, j_l(x) \rightarrow 0; n_l(x) \rightarrow \infty.$$

3.4 $x \rightarrow 0$ 和 $x \rightarrow \infty$ 时的行为

- 得到: 当 $x \rightarrow 0$ 时,

$$j_0(x) \rightarrow 1, j_l(x) \rightarrow 0; n_l(x) \rightarrow \infty.$$

- 由 $x \rightarrow \infty$ 时的渐近行为:

$$\begin{aligned} j_l(x) &\sim \frac{1}{x} \cos\left(x - \frac{l+1}{2}\pi\right), \\ n_l(x) &\sim \frac{1}{x} \sin\left(x - \frac{l+1}{2}\pi\right), \end{aligned}$$

3.4 $x \rightarrow 0$ 和 $x \rightarrow \infty$ 时的行为

$$\begin{aligned}h_l^{(1)}(x) &\sim \frac{1}{x} e^{ix} (-i)^{l+1}, \\h_l^{(2)}(x) &\sim \frac{1}{x} e^{-ix} (-i)^{l+1}.\end{aligned}$$

- 显然, 球外解包含两个部分, 即线性无关的两个特解.

4. 柱函数应用举例

例1: $p.280, No.5$

4. 柱函数应用举例

例1: $p.280, No.5$

- 第一步, 选取坐标系, 写出定解问题.

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & (\text{稳恒状态 } u_t = 0) \\ u \Big|_{z=0} = u_0 \rho^2, \\ u \Big|_{z=L} = u_1, \\ \frac{\partial u}{\partial \rho} \Big|_{\rho=\rho_0} = 0. \end{cases}$$

4. 柱函数应用举例

- 第二步, 分离变量, 写出通解.

$$u(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z).$$

$$\Phi(\varphi) : \cos m\varphi, \sin m\varphi; m = 0, 1, 2, \dots$$

⁷⁴柱内解舍去 $N_0(\sqrt{\mu}\rho)$.

4. 柱函数应用举例

- 第二步, 分离变量, 写出通解.

$$u(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z).$$

$$\Phi(\varphi) : \cos m\varphi, \sin m\varphi; m = 0, 1, 2, \dots$$

- 轴对称问题 $\implies m = 0$,⁷⁴

$$R(\rho) : J_0(\sqrt{\mu}\rho).$$

⁷⁴柱内解舍去 $N_0(\sqrt{\mu}\rho)$.

4. 柱函数应用举例

- 第二步, 分离变量, 写出通解.

$$u(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z).$$

$$\Phi(\varphi) : \cos m\varphi, \sin m\varphi; m = 0, 1, 2, \dots$$

- 轴对称问题 $\implies m = 0$,⁷⁴

$$R(\rho) : J_0(\sqrt{\mu}\rho).$$

- 由 $\left. \frac{\partial u}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_0} = 0 \implies \sqrt{\mu}J'_0(\sqrt{\mu}\rho_0) = 0$.

⁷⁴柱内解舍去 $N_0(\sqrt{\mu}\rho)$.

4. 柱函数应用举例

分两种情形：

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 柱函数的来源和分类

2. 柱函数的性质

3. 球 *Bessel* 函数及其性质

4. 柱函数应用举例

4. 柱函数应用举例

分两种情形：

- (i) $\mu = 0$, 则 $Z'' = 0$. (因为 $Z'' - \mu Z = 0$)
所以, $Z(z) : 1, z$.

4. 柱函数应用举例

分两种情形：

- (i) $\mu = 0$, 则 $Z'' = 0$. (因为 $Z'' - \mu Z = 0$)
所以, $Z(z) : 1, z$.
- (ii) $\mu \neq 0$, 则 $J'_0(\sqrt{\mu}\rho_0) = -J_1(\sqrt{\mu}\rho_0) = 0$,
给出 $\sqrt{\mu_n^{(1)}\rho_0} = x_n^{(1)}$, 或 $\mu_n^{(1)} = (x_n^{(1)}/\rho_0)^2$.
而且 $Z(z) : e^{\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0}z}, e^{-\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0}z}$.

4. 柱函数应用举例

● 所以, 通解为:

$$U(\rho, z) = A_0 + B_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0} z} + B_n e^{-\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0} z}) J_0\left(\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0} \rho\right).$$

4. 柱函数应用举例

- 第三步, 利用正交性, 模, 递推关系定出系数 A_0, B_0, A_n, B_n 等.

4. 柱函数应用举例

- 第三步, 利用正交性, 模, 递推关系定出系数 A_0, B_0, A_n, B_n 等.
- 由上下底边界条件得:

$$A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n + B_n) J_0\left(\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0} \rho\right) = u_0 \rho^2, \quad (1)$$

$$A_0 + B_0 L + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0} L} + B_n e^{-\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0} L}) J_0\left(\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0} \rho\right) = u_1. \quad (2)$$

4. 柱函数应用举例

- 将前面第一式右端 $u_0\rho^2$ 用 $J_0(x)$ 展开, 得⁷⁵

$$A_0 = \frac{1}{[N_0^{(0)}]^2} \int_0^{\rho_0} u_0\rho^2 J_0\left(\frac{x_0^{(1)}}{\rho_0}\rho\right) \rho d\rho.$$

⁷⁵已用到正交性.

4. 柱函数应用举例

- 将前面第一式右端 $u_0\rho^2$ 用 $J_0(x)$ 展开, 得⁷⁵

$$A_0 = \frac{1}{[N_0^{(0)}]^2} \int_0^{\rho_0} u_0\rho^2 J_0\left(\frac{x_0^{(1)}}{\rho_0}\rho\right) \rho d\rho.$$

- 因为

$$\begin{aligned} x_0^{(1)} &= 0, & J_0(0) &= 1, \\ [N_0^{(0)}]^2 &= \frac{1}{2}\rho_0^2[J_0(0)]^2 = \frac{1}{2}\rho_0^2. \end{aligned}$$

⁷⁵已用到正交性.

4. 柱函数应用举例

● 所以,

$$A_0 = \frac{2}{\rho_0^2} \int_0^{\rho_0} u_0 \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} u_0 \rho_0^2.$$

4. 柱函数应用举例

- 所以,

$$A_0 = \frac{2}{\rho_0^2} \int_0^{\rho_0} u_0 \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} u_0 \rho_0^2.$$

- 对 $n \neq 0$ 的情形, 有

$$A_n + B_n = \frac{1}{[N_n^{(0)}]^2} \int_0^{\rho_0} u_0 \rho^2 J_0\left(\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0} \rho\right) \rho d\rho.$$

4. 柱函数应用举例

- 所以,

$$A_0 = \frac{2}{\rho_0^2} \int_0^{\rho_0} u_0 \rho^3 d\rho = \frac{1}{2} u_0 \rho_0^2.$$

- 对 $n \neq 0$ 的情形, 有

$$A_n + B_n = \frac{1}{[N_n^{(0)}]^2} \int_0^{\rho_0} u_0 \rho^2 J_0\left(\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0} \rho\right) \rho d\rho.$$

- 因为 $[N_n^{(0)}]^2 = \frac{1}{2} \rho_0^2 [J_0(x_n^{(1)})]^2$,

4. 柱函数应用举例

所以,

$$\begin{aligned} A_n + B_n &= \frac{2}{\rho_0^2 [J_0(x_n^{(1)})]^2} \int_0^{\rho_0} u_0 \rho^3 J_0\left(\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0} \rho\right) d\rho \\ &= \frac{2u_0}{\rho_0^2 [J_0(x_n^{(1)})]^2} \cdot \frac{\rho_0^4}{[x_n^{(1)}]^4} \int_0^{x_n^{(1)}} x^3 J_0(x) dx, \end{aligned}$$

其中

$$x \equiv \frac{x_n^{(1)}}{\rho_0} \rho.$$

4. 柱函数应用举例

再利用书 p.270 例1, 则

$$\begin{aligned} A_n + B_n &= \frac{2u_0\rho_0^2}{[x_n^{(1)}]^4[J_0(x_n^{(1)})]^2} \cdot 2[x_n^{(1)}]^2 J_0(x_n^{(1)}) \\ &= \frac{4u_0\rho_0^2}{[x_n^{(1)}]^2 J_0(x_n^{(1)})}. \end{aligned} \quad (3)$$

4. 柱函数应用举例

- 比较 (2) 式两端 $J_0(x)$ 的系数得:

$$\begin{cases} A_0 + B_0 L = u_1, \\ A_n e^{\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0} L} + B_n e^{-\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0} L} = 0. \end{cases}$$

4. 柱函数应用举例

- 比较 (2) 式两端 $J_0(x)$ 的系数得:

$$\begin{cases} A_0 + B_0 L = u_1, \\ A_n e^{\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0} L} + B_n e^{-\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0} L} = 0. \end{cases}$$

- 即

$$\begin{cases} B_0 = \frac{u_1 - u_0 \rho_0^2 / 2}{L}, & (4) \\ A_n = -B_n e^{-\frac{2x_n^{(1)}}{\rho_0} L}. & (5) \end{cases}$$

4. 柱函数应用举例

● 由(3), (5)解出:

$$\begin{cases} A_n = \frac{4u_0\rho_0^2}{[x_n^{(1)}]^2 J_0(x_n^{(1)}) \sinh(\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0}L)} \cdot (-\frac{1}{2}e^{-\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0}L}), \\ B_n = \frac{4u_0\rho_0^2}{[x_n^{(1)}]^2 J_0(x_n^{(1)}) \sinh(\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0}L)} \cdot (\frac{1}{2}e^{\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0}L}). \end{cases}$$

4. 柱函数应用举例

● 所以,

$$\begin{aligned} U(\rho, z) = & \frac{1}{2}u_0\rho_0^2 + \frac{u_1 - u_0\rho_0^2/2}{L}z \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4u_0\rho_0^2}{[x_n^{(1)}]^2 J_0(x_n^{(1)}) \sinh(\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0}L)} \\ & \times \sinh \frac{x_n^{(1)}}{\rho_0}(L - z) \cdot J_0(\frac{x_n^{(1)}}{\rho_0}\rho). \end{aligned}$$

4. 柱函数应用举例

例2: $p.280, No.7$

4. 柱函数应用举例

例2: $p.280, No.7$

- 第一步, 选取坐标系, 写出定解问题.

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 \nabla^2 u = 0, \\ u|_{t=0} = (1 - \rho^2/\rho_0^2)u_0, \\ u_t|_{t=0} = 0, \\ u|_{\rho=\rho_0} = 0. \end{cases}$$

4. 柱函数应用举例

- 第二步, 分离变量, 写出通解.

$$u = vT \implies \begin{cases} \nabla^2 v + k^2 v = 0, \\ T'' + k^2 a^2 T = 0. \end{cases}$$

4. 柱函数应用举例

- 第二步, 分离变量, 写出通解.

$$u = vT \implies \begin{cases} \nabla^2 v + k^2 v = 0, \\ T'' + k^2 a^2 T = 0. \end{cases}$$

- 所以,

$$T(t) : \cos kat, \sin kat;$$

$$v(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z),$$

$$\Phi(\varphi) : \cos m\varphi, \sin m\varphi; m = 0, 1, 2, \dots$$

4. 柱函数应用举例

- 轴对称 $\implies m = 0$.

$Z(z) : C$ (常数), (注: 二维问题与 z 无关.)

$R(\rho) : J_0(k\rho)$, (注: 圆内解舍去 $N_0(k\rho)$.)

4. 柱函数应用举例

- 轴对称 $\implies m = 0$.
 $Z(z) : C$ (常数), (注: 二维问题与 z 无关.)
 $R(\rho) : J_0(k\rho)$, (注: 圆内解舍去 $N_0(k\rho)$.)
- 因为 $u|_{\rho=\rho_0} = 0$, 所以,

$$J_0(k\rho_0) = 0 \implies k_n^{(0)} = x_n^{(0)}/\rho_0.$$

4. 柱函数应用举例

所以, 通解为:

$$\begin{aligned} u(\rho, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos k_n^{(0)} at + B_n \sin k_n^{(0)} at) J_0(k_n^{(0)} \rho) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos \frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} at + B_n \sin \frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} at) J_0(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} \rho) \end{aligned}$$

4. 柱函数应用举例

- 第三步, 利用初始条件确定系数 A_n, B_n .

4. 柱函数应用举例

- 第三步, 利用初始条件确定系数 A_n, B_n .
- 因为, $u_t \Big|_{t=0} = 0$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} a \cdot \cos \frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} a t \Big|_{t=0} \cdot J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} \rho\right) = 0.$$

4. 柱函数应用举例

- 第三步, 利用初始条件确定系数 A_n, B_n .
- 因为, $u_t \Big|_{t=0} = 0$, 即

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} a \cdot \cos \frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} a t \Big|_{t=0} \cdot J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} \rho\right) = 0.$$

- 所以, $B_n = 0$.

4. 柱函数应用举例

● 因此,

$$u(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} \rho\right) \cos \frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} at.$$

4. 柱函数应用举例

● 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} \rho\right) = \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) u_0,$$

4. 柱函数应用举例

● 因为

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} \rho\right) = \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) u_0,$$

● 所以

$$A_n = \frac{1}{[N_n^{(0)}]^2} \int_0^{\rho_0} u_0 \left(1 - \frac{\rho^2}{\rho_0^2}\right) J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} \rho\right) \rho d\rho.$$

4. 柱函数应用举例

- 对侧面第一类边界条件, 有

$$[N_n^{(0)}]^2 = \frac{1}{2}\rho_0^2[J_1(x_n^{(0)})]^2.$$

4. 柱函数应用举例

● 所以,

$$\begin{aligned}
 A_n &= \frac{1}{[N_n^{(0)}]^2} \left[u_0 \int_0^{\rho_0} \rho J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} \rho\right) d\rho - \frac{u_0}{\rho_0^2} \int_0^{\rho_0} \rho^3 J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} \rho\right) d\rho \right] \\
 &= \frac{1}{[N_n^{(0)}]^2} \cdot 4u_0 \frac{\rho_0^2}{[x_n^{(0)}]^3} J_1(x_n^{(0)}) \quad (\text{见 p.270 例1}) \\
 &= \frac{2}{\rho_0^2 [J_1(x_n^{(0)})]^2} \cdot \frac{4u_0 \rho_0^2}{[x_n^{(0)}]^3} J_1(x_n^{(0)}) \\
 &= \frac{8u_0}{[x_n^{(0)}]^3 J_1(x_n^{(0)})}.
 \end{aligned}$$

4. 柱函数应用举例

● 因此,

$$u(\rho, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8u_0}{[x_n^{(0)}]^3 J_1(x_n^{(0)})} J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} \rho\right) \cos \frac{x_n^{(0)}}{\rho_0} at.$$

4. 柱函数应用举例

例3

设有一高为 h ，半径为 a 的圆柱体，其上下底面的温度保持为零，侧面温度 u_0 (常数)，求稳定时柱内温度分布.

4. 柱函数应用举例

- 解：第一步, 选取坐标系, 写出定解问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0 & (\text{稳恒状态 } u_t = 0) \\ u|_{z=0} = 0, & u|_{z=h} = 0, \\ u|_{\rho=a} = u_0. \end{cases}$$

4. 柱函数应用举例

- 第二步, 分离变量, 写出通解

$$u(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

$$\Phi(\varphi) : \cos m\varphi, \sin m\varphi; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

4. 柱函数应用举例

- 第二步, 分离变量, 写出通解

$$u(\rho, \varphi, z) = R(\rho)\Phi(\varphi)Z(z)$$

$$\Phi(\varphi) : \cos m\varphi, \sin m\varphi; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

- 轴对称问题与 φ 无关 $\implies m = 0$.

4. 柱函数应用举例

- 因为上下底奇次边界条件,

九、方程和定解条件的导出

十、数学物理方程的分类和达朗贝尔公式

十一、直角坐标系中方程的分离变量法

十二、球、柱坐标系中齐次方程的分离变量法

十三、球函数

第十四章、柱函数

1. 柱函数的来源和分类

2. 柱函数的性质

3. 球 *Bessel* 函数及其性质

4. 柱函数应用举例

4. 柱函数应用举例

- 因为上下底奇次边界条件,
- 所以先解 $Z'' - \mu Z = 0$.

4. 柱函数应用举例

- 因为上下底奇次边界条件,
- 所以先解 $Z'' - \mu Z = 0$.
- 即

$$\begin{cases} Z'' - \mu Z = 0, \\ Z(0) = Z(h) = 0. \end{cases}$$

4. 柱函数应用举例

- 因此，利用直角坐标系中分离变量法，得：
 $\mu < 0$, 且

$$-\mu = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

4. 柱函数应用举例

- 因此，利用直角坐标系中分离变量法，得：
 $\mu < 0$, 且

$$-\mu = \left(\frac{n\pi}{h}\right)^2, \quad n = 1, 2, \dots,$$

- 所以， z 方向上的本征解为：

$$Z(z) = \sin \frac{n\pi}{h} z.$$

4. 柱函数应用举例

- 对 $R(\rho)$, 它满足虚宗量 *Bessel* 方程, 其解为:

$$I_0(\sqrt{-\mu}\rho) = I_0\left(\frac{n\pi}{h}\rho\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

其中柱内解已舍去 $\rho \rightarrow 0$ 时发散的虚宗量 Neumann 函数 $K_0(\frac{n\pi}{h}\rho)$.

4. 柱函数应用举例

- 对 $R(\rho)$, 它满足虚宗量 Bessel 方程, 其解为:

$$I_0(\sqrt{-\mu}\rho) = I_0\left(\frac{n\pi}{h}\rho\right), \quad n = 1, 2, \dots,$$

其中柱内解已舍去 $\rho \rightarrow 0$ 时发散的虚宗量 Neumann 函数 $K_0(\frac{n\pi}{h}\rho)$.

- 所以, 通解为:

$$u(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_0\left(\frac{n\pi}{h}\rho\right) \cdot \sin \frac{n\pi}{h} z, \quad n = 1, 2, \dots$$

4. 柱函数应用举例

- 第三步, 由侧面边界条件及正交性定出系数 A_n .

4. 柱函数应用举例

- 第三步, 由侧面边界条件及正交性定出系数 A_n .
- 因为

$$u|_{\rho=a} = u_0,$$

4. 柱函数应用举例

- 第三步, 由侧面边界条件及正交性定出系数 A_n .
- 因为

$$u|_{\rho=a} = u_0,$$

- 所以

$$u_0 = \sum_{n=1}^{\infty} A_n I_0\left(\frac{n\pi}{h}a\right) \cdot \sin \frac{n\pi}{h}z.$$

注: $A_n I_0(\frac{n\pi}{h}a)$ 可以理解为 u_0 展开成 Fourier 级数的展开系数.

4. 柱函数应用举例

● 所以

$$\begin{aligned} A_n I_0\left(\frac{n\pi}{h}a\right) &= \frac{2}{h} \int_0^h u_0 \sin \frac{n\pi}{h} z \, dz \\ &= \frac{2u_0}{n\pi} [1 - (-1)^n] \\ &= \begin{cases} 0, & n = 2k, \quad k = 1, 2, \dots \\ \frac{4u_0}{(2k-1)\pi}, & n = 2k-1, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

4. 柱函数应用举例

● 即

$$A_{2k-1} = \frac{4u_0}{(2k-1)\pi \cdot I_0\left(\frac{2k-1}{h}\pi a\right)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

4. 柱函数应用举例

● 即

$$A_{2k-1} = \frac{4u_0}{(2k-1)\pi \cdot I_0\left(\frac{2k-1}{h}\pi a\right)}, \quad k = 1, 2, \dots$$

● 所以

$$\begin{aligned} u(\rho, z) &= \frac{4u_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{(2k-1)\pi}{h}\rho\right) \sin \frac{(2k-1)\pi}{h}z}{I_0\left(\frac{(2k-1)\pi}{h}a\right) (2k-1)} \\ &= \frac{4u_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{I_0\left(\frac{(2k+1)\pi}{h}\rho\right) \sin \frac{(2k+1)\pi}{h}z}{I_0\left(\frac{(2k+1)\pi}{h}a\right) (2k+1)}. \end{aligned}$$